BCE

BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

Code sujet : 297

Conception : EDHEC BS

OPTION SCIENTIFIQUE

MATHÉMATIQUES

Mardi 5 mai 2020, de 8 h. à 12 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Aucun document n'est autorisé. ***L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.*** *Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice 1

Soit f la fonction définie par :

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ f(x,y,z) = x\,\mathrm{e}^{x(y^2+z^2+1)}$$

1) Montrer que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^3$.

2) Déterminer le seul point critique A de f.

3) a) Calculer les valeurs des dérivées partielles d'ordre 2 de f en A.
b) Former la hessienne de f au point A et vérifier qu'elle est diagonale. Montrer que f présente un minimum local en A. Préciser la valeur de ce minimum.

4) a) Montrer que, pour tout (x,y,z) de $\mathbb{R}^3$, $f(x,y,z) \geq x\,\mathrm{e}^x$.
b) Que peut-on en déduire pour le minimum de f trouvé à la question 3b) ?

5) On souhaite étudier les extrema de f sous la contrainte linéaire (C) : $\begin{cases} x=1 \\ y+z=0 \end{cases}$. Montrer que, sous la contrainte (C), f présente un minimum global au point $(1,0,0)$. Quelle est sa valeur ?

6) On souhaite maintenant étudier les extrema de f sous la contrainte (C') : $x\left(y^2+z^2+1\right)=1$.
Montrer que f possède un maximum global sous la contrainte (C'). En quel point est-il atteint ? Quelle est sa valeur ?

Exercice 2

On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur le segment $[0\,;\theta]$, où θ (theta) désigne un réel strictement positif.
1) On note f une densité de X, F sa fonction de répartition, $E(X)$ son espérance et $V(X)$ sa variance.

a) Rappeler l'expression explicite de $F(x)$ en fonction de x et θ.

b) Donner les valeurs de $E(X)$ et $V(X)$.

Dans la suite, on suppose que le réel θ est inconnu et on en propose deux estimateurs. Pour construire ces estimateurs, on dispose d'un échantillon $(X_1, ..., X_n)$ de la loi de X, ce qui signifie que $X_1, ..., X_n$ sont n variables aléatoires, définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, mutuellement indépendantes et de même loi que X.

2) On pose $Y_n=\max(X_1, X_2, ..., X_n)$ et on admet que Y_n est une variable aléatoire, elle aussi, définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

a) On rappelle qu'en `Scilab`, la commande `grand(x,y,'unf',a,b)` simule $x\times y$ variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi uniforme sur $[a\,;b]$. Écrire des commandes `Scilab` permettant d'entrer les valeurs des variables qui sont nécessaires et de simuler Y_n.

b) On note F_n la fonction de répartition de Y_n. Pour tout réel x, écrire $F_n(x)$ à l'aide de $F(x)$ puis déterminer explicitement $F_n(x)$.

c) En déduire que Y_n est une variable aléatoire à densité, puis donner une densité f_n de Y_n.

d) Montrer que Y_n est un estimateur asymptotiquement sans biais de θ.

3) On pose maintenant $Z_n=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$. Déterminer $E(Z_n)$ puis proposer un estimateur $\widehat{Z_n}$, construit de façon affine à partir de Z_n, et qui soit un estimateur sans biais de θ.

Définition

On dit qu'un estimateur T_n de θ est d'ordre de convergence $\alpha>0$ lorsque la suite $\left(n^{\alpha}(T_n-\theta)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire qui n'est pas quasi-certainement nulle.

4) a) Utiliser le théorème de Slutsky pour établir le résultat suivant : si une suite $(R_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires converge en loi vers une variable aléatoire R et si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de réels qui converge vers le réel a, alors la suite $(a_nR_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers la variable aléatoire aR.

b) Déduire de ce résultat l'unicité de l'ordre de convergence d'un estimateur (on pourra raisonner par l'absurde en supposant qu'un estimateur T_n de θ possède deux ordres distincts, α et β, avec par exemple $0<\alpha<\beta$).

5) On considère, dans cette question, une variable aléatoire T suivant la loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{\theta}$ et on pose $Y = -T$. Déterminer la fonction de répartition, que l'on notera F_Y, de Y.

6) a) Justifier que, pour tout réel x positif ou nul, on a $P(n(Y_n - \theta) \leq x) = 1$.

b) Montrer que, pour tout réel x strictement négatif et pour tout entier naturel n supérieur à $-\frac{x}{\theta}$, on a l'égalité :

$$P(n(Y_n - \theta) \leq x) = \left(1 + \frac{x}{n\theta}\right)^n$$

c) Établir enfin que $n(Y_n - \theta)$ converge en loi vers la variable aléatoire Y. Conclure quant à l'ordre de convergence de Y_n.

7) a) Justifier que $\widehat{Z_n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(2X_i)$, où $\widehat{Z_n}$ est l'estimateur présenté à la troisième question.

b) On pose $\widehat{Z_n}^* = \sqrt{n}\,\frac{\widehat{Z_n} - E(2X)}{\sqrt{V(2X)}}$. En appliquant le théorème limite central à la suite de variables aléatoires $(2X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, montrer que $\widehat{Z_n}^*$ converge en loi vers une variable aléatoire Z dont on précisera la loi.

c) Vérifier que $\widehat{Z_n}^* = \frac{\sqrt{3n}}{\theta}\left(\widehat{Z_n} - \theta\right)$ et en déduire que $\sqrt{n}\left(\widehat{Z_n} - \theta\right)$ converge en loi vers une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}\left(0, \frac{\theta^2}{3}\right)$. Donner l'ordre de convergence de $\widehat{Z_n}$.

Exercice 3

Dans tout l'exercice, on désigne par E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n ($n \geq 2$), on note Id l'endomorphisme identité de E et θ l'endomorphisme nul de E. Pour tout endomorphisme f de E, on appelle trace de f, le réel, noté $\mathrm{Tr}(f)$, égal à la trace de n'importe laquelle des matrices représentant f. On admet que l'application trace, ainsi définie, est une forme linéaire sur $\mathcal{L}(E)$.

Partie 1 : préliminaires

1) On considère un projecteur p de E, c'est-à-dire un endomorphisme de E tel que $p \circ p = p$.

a) Montrer que $E = \mathrm{Ker}(p) \oplus \mathrm{Im}(p)$

b) Établir que $\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Ker}(Id - p)$

c) En déduire que p est diagonalisable et que l'on a :

$$\mathrm{rg}(p) = \mathrm{Tr}(p)$$

2) Montrer par récurrence sur k ($k \in \mathbb{N}^*$) que, si E_1, ..., E_k sont des sous-espaces vectoriels de E, alors on a l'inégalité :

$$\dim(E_1 + \ldots + E_k) \leq \dim(E_1) + \ldots + \dim(E_k)$$

Partie 2 : condition nécessaire et suffisante pour qu'une somme de projecteurs soit un projecteur

Soit un entier naturel k supérieur ou égal à 2. On considère des projecteurs de E, notés $p_1, p_2, ..., p_k$, et on pose $q_k = p_1 + p_2 + ... + p_k$.

3) Montrer que si, pour tout couple (i,j) de $[\![1,k]\!]^2$ tel que $i \neq j$, on a $p_i \circ p_j = \theta$, alors q_k est un projecteur.

On suppose dans toute la suite que q_k est un projecteur et on souhaite montrer que, pour tout couple (i,j) de $[\![1,k]\!]^2$ tel que $i \neq j$, on a $p_i \circ p_j = \theta$.

4) a) Montrer que $\text{Im}(q_k)$ est inclus dans $\text{Im}(p_1)+...+\text{Im}(p_k)$.

b) Établir, grâce aux résultats de la partie 1, que $\text{rg}(q_k) = \dim(\text{Im}(p_1)+...+\text{Im}(p_k))$, puis en déduire que $\text{Im}(q_k) = \text{Im}(p_1)+...+\text{Im}(p_k)$.

c) Établir finalement l'égalité :

$$\text{Im}(q_k) = \text{Im}(p_1) \oplus ... \oplus \text{Im}(p_k)$$

5) a) Montrer que, pour tout j de $[\![1,k]\!]$, on a l'égalité $q_k \circ p_j = p_j$.

b) En déduire que, pour tout j de $[\![1,k]\!]$, on a : $\forall x \in E$, $\displaystyle\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{k} p_i\big(p_j(x)\big) = 0$.

c) Montrer alors que, pour tout couple (i,j) de $[\![1,k]\!]^2$ tel que $i \neq j$, on a $p_i \circ p_j = \theta$.

6) Conclure quant à l'objectif de cette partie.

Problème

Partie 1 : préliminaires (les trois questions sont indépendantes)

1) Pour tout entier naturel n non nul, on pose : $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$.

a) Compléter le script `Scilab` suivant pour qu'il calcule et affiche u_n pour une valeur de n entrée par l'utilisateur.

```
n=input('entrez une valeur pour n :')
x=1:n
u=------
disp(u)
```

b) Justifier que, pour tout entier naturel k non nul, on a : $\dfrac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln k \leq \dfrac{1}{k}$.

c) Utiliser la question précédente pour montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a :

$$0 \leq u_n \leq 1$$

2) Dans cette question, x désigne un réel élément de $[0\,;1[$.

a) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et pour tout t de $[0\,; x]$, simplifier la somme $\displaystyle\sum_{p=1}^{n} t^{p-1}$.

b) En déduire que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a :

$$\sum_{p=1}^{n} \frac{x^p}{p} = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt$$

c) Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt = 0$.

d) Établir alors que la série de terme général $\frac{x^p}{p}$ est convergente et que :

$$\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{x^p}{p} = -\ln(1-x)$$

3) On considère deux suites réelles $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à termes positifs et on suppose que les séries de termes généraux a_n et b_n sont convergentes, de sommes respectives $A = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ et $B = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n$.

Pour tout entier naturel n non nul, on pose : $c_n = \sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k}$.

a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n} c_k \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=0}^{n} b_k\right) \leq \sum_{k=1}^{2n} c_k$.

b) En déduire que la série de terme général c_n converge et que l'on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} c_n = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\right)$$

c) Soit x un réel élément de $[0\,;1[$. On suppose dans cette question que l'on a : $a_k = \frac{x^k}{k}$ $(k \in \mathbb{N}^*)$ et $b_k = x^k$ $(k \in \mathbb{N})$.

i) Justifier rapidement que les séries de termes généraux a_n et b_n sont convergentes et à termes positifs.

ii) Compléter le script Scilab suivant pour qu'il calcule et affiche la valeur de c_n pour une valeur de n entrée par l'utilisateur.

```
n=input('entrez une valeur pour n :')
x=input('entrez une valeur pour x :')
u=1:n
v=n-1:-1:0
a=------
b=------
c=------
disp(c)
```

iii) Donner l'expression de c_n sous forme de somme.

Partie 2 : étude d'une fonction définie comme somme de série

Dans cette partie, on désigne toujours par x un réel de $[0;1[$.

4) a) Utiliser la première question du préliminaire pour établir que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)x^n = \left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}x^n\right)$$

Tournez la page S.V.P.

b) En déduire que : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)x^n = \frac{-\ln(1-x)}{1-x}$.

5) a) Montrer que, pour tout réel u strictement positif, on a : $\ln u \leq u$.

b) En déduire que la série de terme général $(\ln n)x^n$, avec $n \geq 1$, est convergente.

6) On pose : $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(\ln n)x^n$.

a) Établir, en utilisant le résultat de la question 1c), que : $\dfrac{-\ln(1-x)}{1-x} - \dfrac{x}{1-x} \leq f(x) \leq \dfrac{-\ln(1-x)}{1-x}$.

b) Montrer finalement l'équivalent suivant : $f(x) \underset{1^-}{\sim} \dfrac{-\ln(1-x)}{1-x}$.

7) a) Étudier les variations de la fonction f.

b) Dresser le tableau de variations de f (valeur en 0 et limite en 1^- comprises).

8) a) En remarquant que $f(x) = \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}(\ln n)x^n$, montrer que l'on a : $0 \leq f(x) \leq \dfrac{x}{(1-x)^2} - x$.

b) En déduire que f est continue à droite en 0 et dérivable à droite en 0. Donner la valeur du nombre dérivé à droite en 0 de f.

c) On admet que f est continue sur $[0;1[$. Donner la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$.

IMPRIMERIE NATIONALE – 20 1079 – D'après documents fournis

Éléments de correction

Exercice 1

1) Les fonctions $(x,y,z) \mapsto x$ et $(x,y,z) \mapsto e^{x(y^2+z^2+1)}$ sont de classe C^2 sur $\mathbb{R}^3$ donc *f* est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^3$ comme produit de fonctions de classe C^2 sur $\mathbb{R}^3$.

2) On a :

$$\partial_1(f)\,(x,y,z) = \left(1+x\left(y^2+z^2+1\right)\right)\mathrm{e}^{x(y^2+z^2+1)}.$$

$$\partial_2(f)\,(x,y,z) = 2x^2y\,\mathrm{e}^{x(y^2+z^2+1)}.$$

$$\partial_3(f)\,(x,y,z) = 2x^2z\,\mathrm{e}^{x(y^2+z^2+1)}.$$

Les points critiques de *f* sont les triplets (x,y,z) qui annulent le gradient de *f*, et on trouve que le seul point critique de *f* est $A = (-1,0,0)$.

3) a) On calcule les dérivées partielles d'ordre 2 de *f*.

$$\partial_{1,1}^2(f)(x,y,z) = \left(y^2+z^2+1\right)\left(2+x\left(y^2+z^2+1\right)\right)\,\mathrm{e}^{x(y^2+z^2+1)}$$

$$\partial_{1,2}^2(f)(x,y,z) = 2xy\left(2+x\left(y^2+z^2+1\right)\right)\mathrm{e}^{x(y^2+z^2+1)}$$

$$\partial_{1,3}^2(f)(x,y,z) = 2xz\left(2+x\left(y^2+z^2+1\right)\right)\mathrm{e}^{x(y^2+z^2+1)}$$

$$\partial_{2,2}^2(f)(x,y,z) = 2x^2\left(1+2xy^2\right)\mathrm{e}^{x(y^2+z^2+1)}$$

$$\partial_{2,3}^2(f)(x,y,z) = 4x^3yz\,\mathrm{e}^{x(y^2+z^2+1)}$$

$$\partial_{3,3}^2(f)(x,y,z) = 2x^2\left(1+2xz^2\right)\mathrm{e}^{x(y^2+z^2+1)}$$

Pour finir, *f* est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^3$ donc $\partial_{2,1}^2(f)(x,y,z) = \partial_{1,2}^2(f)(x,y,z)$, $\partial_{3,1}^2(f)(x,y,z) = \partial_{1,3}^2(f)(x,y,z)$ et $\partial_{3,2}^2(f)(x,y,z) = \partial_{2,3}^2(f)(x,y,z)$.

b) On trouve que la hessienne de *f* au point *A* est $\nabla^2(f)(-1,0,0) = \begin{pmatrix} 1/\mathrm{e} & 0 & 0 \\ 0 & 2/\mathrm{e} & 0 \\ 0 & 0 & 2/\mathrm{e} \end{pmatrix}$ dont les valeurs propres sont $\lambda_1 = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$ et $\lambda_2 = \dfrac{2}{\mathrm{e}}$.

Les valeurs propres de la hessienne sont toutes deux strictement positives donc *f* présente un minimum local *m* au point *A* et on a $m = -\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

4) a) Pour tout (y,z) de $\mathbb{R}^2$, on a $y^2+z^2+1 \geq 1$. Ensuite, en étudiant les cas $x \geq 0$ et $x < 0$, on trouve dans les deux cas : $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ f(x,y,z) \geq xe^x$.

b) En étudiant la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=x\mathrm{e}^x$, on trouve que g admet un minimum global en –1 qui vaut $g(-1)=-\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

On obtient donc avec 4a) : $\forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ f(x,y,z)\geq -\dfrac{1}{\mathrm{e}}$

Ceci prouve que le minimum local trouvé à la question 3b) est en fait un minimum global de f sur $\mathbb{R}^3$.

5) Les points critiques de f sous la contrainte (C) : $\begin{cases} x=1 \\ y+z=0 \end{cases}$ sont les points de (C) en lesquels le gradient de f est orthogonal à (H) : $\begin{cases} x=0 \\ y+z=0 \end{cases}$. En écrivant que $\langle \nabla(f)(1,y,-y)\ ,\ (0,1,-1)\rangle = 0$, on obtient : $y=z$.

Comme $z=-y$, on a finalement $z=y=0$ et le seul point critique sous la contrainte (C) est $(1,0,0)$.

On a $f(1\ ;\ 0\ ;\ 0)=\mathrm{e}$ et, d'après la question 4a), on sait que $f(x,y,z)\geq x\mathrm{e}^x$ donc on a, pour tout réel y : $f(1,y,-y)\geq \mathrm{e}$.

Ainsi, f présente un minimum global en $(1,0,0)$ sous la contrainte (C) et la valeur de ce minimum est e.

6) Sous la contrainte (C'), on a $\mathrm{e}^{x(y^2+z^2+1)}=\mathrm{e}^1=\mathrm{e}$ donc $f(x,y,z)=\mathrm{e}x$.

Mais la contrainte (C') s'écrit $x=\dfrac{1}{y^2+z^2+1}$, ce qui montre que $0<x\leq 1$.

Dès lors, f a un maximum sous la contrainte (C'), atteint en $(1,0,0)$ et égal à e.

Exercice 2 ....

1) a) D'après le cours, on a: $F(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x<0 \\ \dfrac{x}{\theta} & \text{si } 0\leq x\leq\theta \\ 1 & \text{si } x>\theta \end{cases}$.

b) On a donc : $E(X)=\dfrac{\theta}{2}$ et $V(X)=\dfrac{\theta^2}{12}$.

2) a) On peut proposer :

```
n=input('entrez n :')
theta=input('entrez theta :')
X=grand(1,n,'unf',0,theta)
Y=max(X)
```

b) On a : $F_n(x) = P(Y_n \leq x) = P\left(\bigcap_{k=1}^{n}[X_k \leq x]\right)$.

On obtient par indépendance : $F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \left(\dfrac{x}{\theta}\right)^n & \text{si } 0 \leq x \leq \theta \\ 1 & \text{si } x > \theta \end{cases}$

c) La fonction F_n est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être en 0 et θ (fonctions constantes sur $]-\infty\,;0[$ et $]\theta\,;+\infty[$, fonction polynomiale sur $]0\,;\theta[$). De plus, elle est continue en 0 et θ sans problème (limites à droite et à gauche faciles à calculer) donc Y_n est une variable aléatoire à densité.
Une densité f_n de Y_n est une fonction coïncidant avec la dérivée de F_n, sauf éventuellement en 0 et θ, donc on peut choisir : $f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{nx^{n-1}}{\theta^n} & \text{si } 0 \leq x \leq \theta \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

d) Pour commencer, Y_n est bien un estimateur de θ en tant que fonction, ne dépendant pas de θ, du seul échantillon (X_1, X_2, ..., X_n). De plus, Y_n est une variable aléatoire bornée donc elle a une espérance. Pour finir, on trouve : $E(Y_n) = \int_0^\theta x f_n(x)\,dx = \dfrac{n\theta}{n+1}$.
On en déduit que Y_n est un estimateur asymptotiquement sans biais de θ.

3) Comme $Z_n = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$, on trouve : $E(Z_n) = \dfrac{\theta}{2}$.
En posant $\widehat{Z_n} = 2Z_n$, $\widehat{Z_n}$ est un estimateur de θ et $E\left(\widehat{Z_n}\right) = \theta$ donc $\widehat{Z_n}$ est un estimateur sans biais de θ.

4) a) Par définition de la convergence de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vers le réel *a*, on peut écrire : $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |a_n - a| < \varepsilon$.
Dès lors, si l'on considère les réels a_n, ainsi que le réel a, comme des variables aléatoires certaines, on est en droit d'écrire :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, P(|a_n - a| \geq \varepsilon) = 0$$

Ceci prouve que : $\forall \varepsilon > 0, \lim\limits_{n\to+\infty} P(|a_n - a| \geq \varepsilon) = 0$.
On peut donc en déduire que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers *a* et comme la suite $(R_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers *R*, alors, d'après le théorème de Slutsky, la suite $(a_nR_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers la variable aléatoire $a\,R$.

b) En écrivant $n^{\alpha}(T_n-\theta)=n^{\alpha-\beta}\times n^{\beta}(T_n-\theta)$, et comme $\lim\limits_{n\to+\infty} n^{\alpha-\beta}=0$ (car $\alpha<\beta$), le résultat de 4a) montre que $n^{\alpha}(T_n-\theta)$ convergerait vers la variable certaine égale à 0, ce qui contredit l'hypothèse sur l'ordre de convergence α.
Conclusion : l'ordre de convergence d'un estimateur est unique.

5) On a : $\forall x\in\mathbb{R},\ F_Y(x)=1-F_T(-x)$.

Comme T suit la loi exponentielle de paramètre $\dfrac{1}{\theta}$, on a : $F_Y(x)=\begin{cases} e^{x/\theta} & \text{si } x\leq 0 \\ 1 & \text{si } x>0 \end{cases}$.

6) a) $n(Y_n-\theta)$ prend des valeurs négatives ou nulles donc :

$$\forall x\in\mathbb{R}_+,\quad P(n(Y_n-\theta)\leq x)=1$$

b) Pour tout réel x strictement négatif et tout entier naturel n non nul, on a :

$$P(n(Y_n-\theta)\leq x)==F_n\left(\theta+\frac{x}{n}\right)$$

On vérifie que $0\leq\theta+\dfrac{x}{n}\leq\theta$ dès que $n\geq-\dfrac{x}{\theta}$, puis en remplaçant grâce à 2a) :

$$\forall x\in\mathbb{R}_-^*,\ \forall n\in\mathbb{N},\ n\geq-\frac{x}{\theta},\ P(n(Y_n-\theta)\leq x)=\left(1+\frac{x}{n\theta}\right)^n$$

c) D'après ce qui précède, pour tout réel x strictement négatif, en prenant $n>-\dfrac{x}{\theta}$, on peut écrire : $P(n(Y_n-\theta)\leq x)=\exp\left(n\ln\left(1+\dfrac{x}{n\theta}\right)\right)$.

On a $\lim\limits_{n\to+\infty} n\ln\left(1+\dfrac{x}{n\theta}\right)=\dfrac{x}{\theta}$ d'où :

$$\lim_{n\to+\infty} P(n(Y_n-\theta)\leq x)=e^{x/\theta}$$

Pour finir, en notant G_n la fonction de répartition de $n(Y_n-\theta)$, on a :

$$\forall x\neq 0,\ \lim_{n\to+\infty} G_n(x)=F_Y(x)$$

Ceci prouve que $n(Y_n-\theta)$ converge en loi vers la variable aléatoire Y (puisque 0 n'est pas un point de continuité de F_Y).
On en déduit, par unicité de l'ordre de convergence, que Y_n est d'ordre 1.

7) a) D'après la question 3), on trouve bien $\widehat{Z_n}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(2X_i)$.

b) La suite de variables aléatoires $(2X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes (lemme des coalitions), de même loi (celle de $2X$), ayant une espérance $E(2X)=\theta$ et une variance $V(2X)=4V(X)=\dfrac{\theta^2}{3}$, donc on peut appliquer le théorème limite central à cette suite, qui stipule que $\widehat{Z_n}^*$ converge en loi vers une variable aléatoire Z suivant la loi normale centrée réduite.

c) On trouve effectivement : $\widehat{Z_n}^* = \dfrac{\sqrt{3n}}{\theta}\left(\widehat{Z_n}-\theta\right)$.

De plus, on a $\sqrt{n}\left(\widehat{Z_n}-\theta\right)=\dfrac{\theta}{\sqrt{3}}\widehat{Z_n}^*$ donc, par composition par $x \mapsto \dfrac{\theta}{\sqrt{3}}x$ continue sur $\mathbb{R}$, $\sqrt{n}\left(\widehat{Z_n}-\theta\right)$ converge en loi vers $\dfrac{\theta}{\sqrt{3}}Z$. D'après le cours sur la loi normale, $\dfrac{\theta}{\sqrt{3}}Z$ suit la loi $\mathcal{N}\left(0,\dfrac{\theta^2}{3}\right)$ donc $\sqrt{n}\left(\widehat{Z_n}-\theta\right)$ converge en loi vers une variable non nulle. Par unicité, l'ordre de convergence de $\widehat{Z_n}$ est égal à $\dfrac{1}{2}$.

Exercice 3 ....

1) a) Soit x un élément de $\mathrm{Ker}(p)\cap\mathrm{Im}(p)$.

Il existe t élément de E tel que $x=p(t)$ et $p(x)=0$. On en déduit $x=0$.

On a donc $\mathrm{Ker}(p)\cap\mathrm{Im}(p)=\{0_E\}$.

Comme $\dim\mathrm{Ker}(p)+\dim\mathrm{Im}(p)=\dim E$, on conclut : $E=\mathrm{Ker}(p)\oplus\mathrm{Im}(p)$.

b) • Soit x élément de $\mathrm{Ker}(Id_E-p)$. On a alors $x=p(x)$, ce qui prouve que x appartient à $\mathrm{Im}(p)$. On a donc $\mathrm{Ker}(Id_E-p)\subset\mathrm{Im}(p)$.

• Soit x un élément de $\mathrm{Im}(p)$, il existe u élément de E tel que $x=p(u)$.

En appliquant p, on obtient : $p(x)=x$, ce qui prouve que x appartient à $\mathrm{Ker}(Id_E-p)$. On a donc : $\mathrm{Im}(p)\subset\mathrm{Ker}(Id_E-p)$.

Par double inclusion :

$$\boxed{\mathrm{Im}(p)=\mathrm{Ker}(Id_E-p)}$$

c) En remplaçant $\mathrm{Im}(p)$ par $\mathrm{Ker}(Id_E-p)$ dans l'égalité obtenue à la question 1a), on obtient : $E=\mathrm{Ker}(p)\oplus\mathrm{Ker}(Id_E-p)$, ce qui prouve que les valeurs propres de p sont dans $\{0\ ;1\}$.

• Si 0 est la seule valeur propre de p, alors p est l'endomorphisme nul qui est diagonalisable.

- Si 1 est la seule valeur propre de p, alors p est l'endomorphisme identité qui est diagonalisable.
- Si 0 et 1 sont valeurs propres de p, alors $E = \mathrm{Ker}(p) \oplus \mathrm{Ker}(Id_E - p)$ et p est diagonalisable.

Il existe donc une base de E formée de vecteurs propres de p dans laquelle la matrice D de p est diagonale dont la diagonale ne contient que des 0 et des 1 donc la trace de cette matrice est égale à $\mathrm{rg}(p)$.

On a donc : $\mathrm{Tr}(p) = \mathrm{Tr}(D) = \mathrm{rg}(p)$.

2) On procède par récurrence.

- Pour $k = 1$, on a bien $\dim(E_1) \leq \dim(E_1)$.
- Si l'on suppose, pour un entier k fixé supérieur ou égal à 1, que $\dim(E_1 + ... + E_k) \leq \dim(E_1) + ... + \dim(E_k)$, alors, d'après la formule de Grassmann, on a :

$$\dim(E_1 + ... + E_k + E_{k+1}) = \dim(E_1 + ... + E_k) + \dim(E_{k+1}) - \dim((E_1 + ... + E_k) \cap E_{k+1})$$

D'après l'hypothèse de récurrence, on obtient :

$$\dim(E_1 + ... + E_k + E_{k+1}) \leq \dim(E_1) + ... + \dim(E_{k+1}) - \dim((E_1 + ... + E_k) \cap E_{k+1})$$

On en déduit :

$$\dim(E_1 + ... + E_k + E_{k+1}) \leq \dim(E_1) + ... + \dim(E_k) + \dim(E_{k+1})$$

- On a bien montré par récurrence que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \dim(E_1 + ... + E_k) \leq \dim(E_1) + ... + \dim(E_k)$$

Partie 2

3) On calcule : $q_k^2 = q_k \circ q_k = = \sum_{i=1}^{k} p_i^2 + \sum_{1 \leq i \neq j \leq k} p_i \circ p_j$.

Pour $i \neq j$, on a $p_i \circ p_j = \theta$ et on sait que $p_i^2 = p_i$ donc il reste : $q_k^2 = q_k$.

On a bien montré que q_k est un projecteur.

4) a) $\forall y \in \mathrm{Im}(q_k)$, $\exists x \in E$, $y = q_k(x) = p_1(x) + p_2(x) + ... + p_k(x)$. Ceci montre que y appartient à $\mathrm{Im}(p_1) + ... + \mathrm{Im}(p_k)$, et ainsi : $\mathrm{Im}(q_k) \subset \mathrm{Im}(p_1) + ... + \mathrm{Im}(p_k)$.

b) • Pour compléter ce qui précède, on a, par linéarité de la trace :

$$\mathrm{Tr}(q_k) = \mathrm{Tr}(p_1) + \mathrm{Tr}(p_2) + ... + \mathrm{Tr}(p_k)$$

D'après la question 1), ceci s'écrit : $\mathrm{rg}(q_k) = \mathrm{rg}(p_1) + \mathrm{rg}(p_2) + ... + \mathrm{rg}(p_k)$.

En utilisant la question 2), on obtient :

$$\mathrm{rg}(q_k) \geq \dim(\mathrm{Im}(p_1) + ... + \mathrm{Im}(p_k))$$

- D'après 4a), la dimension de $\mathrm{Im}(q_k)$ est inférieure ou égale à celle de $\mathrm{Im}(p_1) + ... + \mathrm{Im}(p_k)$ et d'après le point précédent, elle est supérieure à la dimension de $\mathrm{Im}(p_1) + ... + \mathrm{Im}(p_k)$ donc ces deux dimensions sont égales.

Pour résumer, on a $\begin{cases}\mathrm{Im}(q_k) \subset \mathrm{Im}(p_1)+...+\mathrm{Im}(p_k) \\ \mathrm{rg}(q_k) = \dim(\mathrm{Im}(p_1)+...+\mathrm{Im}(p_k))\end{cases}$, ce qui prouve, par inclusion et égalité des dimensions, que :

$$\mathrm{Im}(q_k) = \mathrm{Im}(p_1)+...+\mathrm{Im}(p_k)$$

- Pour finir, l'égalité $\mathrm{rg}(q_k) = \mathrm{rg}(p_1)+\mathrm{rg}(p_2)+...+\mathrm{rg}(p_k)$, obtenue plus haut peut s'écrire $\dim(\mathrm{Im}(p_1)+...+\mathrm{Im}(p_k)) = \dim \mathrm{Im}(p_1)+...+\dim \mathrm{Im}(p_k)$.

Ceci prouve que la somme $\mathrm{Im}(q_k) = \mathrm{Im}(p_1) \oplus ... \oplus \mathrm{Im}(p_k)$ est directe.
Bilan :

$$\boxed{\mathrm{Im}(q_k) = \mathrm{Im}(p_1) \oplus ... \oplus \mathrm{Im}(p_k)}$$

5) a) Comme $\mathrm{Im}(q_k) = \mathrm{Im}(p_1) \oplus ... \oplus \mathrm{Im}(p_k)$, alors, pour tout *i* de $[\![1,k]\!]$, on a l'inclusion $\mathrm{Im}(p_j) \subset \mathrm{Im}(q_k)$, donc, pour tout *x* de *E*, $p_j(x)$ appartient à $\mathrm{Im}(q_k)$, qui est égal à $\mathrm{Ker}(q_k - Id)$, et ainsi : $\forall x \in E$, $q_k(p_j(x)) = p_j(x)$.
On a donc : $q_k \circ p_j = p_j$

b) Par définition de q_k, on a : $q_k \circ p_j = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{k} p_i \circ p_j + p_j$.

D'après la question 6a), on a $q_k \circ p_j = p_j$ donc il reste : $\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{k} p_i \circ p_j = \theta$.

En appliquant ceci à un vecteur *x* quelconque de *E*, on obtient :

$$\forall x \in E, \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{k} p_i(p_j(x)) = 0$$

c) L'égalité précédente peut s'écrire :

$$p_1(p_i(x))+...+p_{j-1}(p_j(x))+\underbrace{p_j(p_j(0))}_{\text{vecteur nul}}+p_{j+1}(p_j(x))+...+p_k(p_j(x)) = 0$$

La somme $\mathrm{Im}(p_1)+...+\mathrm{Im}(p_k)$ est directe donc, par unicité de l'écriture du vecteur nul, on a :

$$\forall x \in E,\ p_1(p_j(x)) = ... = p_{j-1}(p_j(x)) = p_{j+1}(p_j(x)) = ... = p_k(p_j(x)) = 0$$

Ainsi, pour tout couple (i,j) de $[\![1,k]\!]^2$ tel que $i \neq j$, on a $p_i \circ p_j = \theta$.

6) q_k est un projecteur si, et seulement si, pour tout couple (i,j) de $[\![1,k]\!]^2$ tel que $i \neq j$, on a $p_i \circ p_j = \theta$.

Problème ....

Partie 1 : préliminaires

1) a) On peut proposer :

```
n=input('entrez une valeur pour n :')
x=1:n
u=sum(x.^-1)-log(n)
disp(u)
```

b) Pour tout t de $[k,k+1]$, on a : $\frac{1}{k+1}\le\frac{1}{t}\le\frac{1}{k}$. On obtient alors en intégrant :

$$\frac{1}{k+1}\le\ln(k+1)-\ln k\le\frac{1}{k}$$

c) En sommant cette inégalité pour k allant de 1 à $n-1$ (avec $n\ge 2$), on trouve, après quelques étapes : $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}-1\le\ln n\le\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\frac{1}{n}$.

On en déduit $\frac{1}{n}\le u_n\le 1$ donc u_n appartient à $[0;1]$.

2) a) Comme $x\in[0;1[$, alors, pour tout t de $[0,x]$, on a $t\neq 1$, d'où :

$$\sum_{p=1}^{n}t^{p-1}=\sum_{k=0}^{n-1}t^k=\frac{1-t^n}{1-t}$$

b) En intégrant entre 0 et x, on obtient, par linéarité de l'intégration :

$$\sum_{p=1}^{n}\int_0^x t^{p-1}dt=-\ln|1-x|-\int_0^x\frac{t^n}{1-t}dt$$

Comme $\int_0^x t^{p-1}dt=\frac{x^p}{p}$ et comme $1-x>0$, on a :

$$\sum_{p=1}^{n}\frac{x^p}{p}=-\ln(1-x)-\int_0^x\frac{t^n}{1-t}dt$$

c) Pour tout t de $[0;x]$, on a $1-x\le 1-t\le 1$ et on en déduit :

$$t^n\le\frac{t^n}{1-t}\le\frac{t^n}{1-x}$$

En intégrant entre 0 et x (bornes dans l'ordre croissant), on obtient :

$$\frac{x^{n+1}}{n+1}\le\int_0^x\frac{t^n}{1-t}dt\le\frac{1}{1-x}\times\frac{x^{n+1}}{n+1}$$

Comme $x\in[0,1[$, $\lim_{n\to+\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}=0$ donc, par encadrement : $\lim_{n\to+\infty}\int_0^x\frac{t^n}{1-t}dt=0$.

d) D'après l'égalité obtenue à la question 3b) et le résultat ci-dessus, la série de terme général $\dfrac{x^p}{p}$ est convergente, et on a : $\sum\limits_{p=1}^{+\infty} \dfrac{x^p}{p} = -\ln(1-x)$.

3) a) • Dans un premier temps, on a : $\sum\limits_{k=1}^{n} c_k = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i \sum\limits_{j=0}^{n-i} b_j$.

Comme tous les termes sont positifs, on peut majorer :

$$\sum_{k=1}^{n} c_k \leq \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{j=0}^{n} b_j$$

• Dans un deuxième temps, on a : $\sum\limits_{k=1}^{2n} c_k = \sum\limits_{i=1}^{2n} a_i \sum\limits_{j=0}^{2n-i} b_j$.

Comme tous les termes sont positifs, on peut minorer : $\sum\limits_{k=1}^{2n} c_k \geq \sum\limits_{i=1}^{n} a_i \sum\limits_{j=0}^{2n-i} b_j$.

Comme $2n-i \geq n$, on peut minorer encore : $\sum\limits_{k=1}^{2n} c_k \geq \sum\limits_{i=1}^{n} a_i \sum\limits_{j=0}^{n} b_j$.

En conclusion, on trouve bien : $\sum\limits_{k=1}^{n} c_k \leq \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \sum\limits_{k=0}^{n} b_k \leq \sum\limits_{k=1}^{2n} c_k$.

b) En posant $C_n = \sum\limits_{k=0}^{n} c_k$, la suite (C_n) est croissante et majorée par $\sum\limits_{i=0}^{+\infty} a_i \sum\limits_{j=0}^{+\infty} b_j$, ce qui montre qu'elle converge et ainsi, la série de terme général c_n est convergente.
De plus, en passant à la limite dans l'encadrement obtenu en 3a), et en notant C la somme de la série de terme général c_n, on obtient : $C = AB$.

c) i) La série de terme général $a_n = \dfrac{x^n}{n}$ est convergente d'après la question 2d) et la série de terme général $b_n = x^n$ est convergente en tant que série géométrique dont la raison x est strictement entre –1 et 1. Elles sont, bien sûr, à termes positifs puisque x est positif.

ii) On peut proposer :

```
n=input('entrez une valeur pour n :')
x=input('entrez une valeur pour x :')
u=1:n
v=n-1:-1:0
a=(x.^u)./u
b=x.^v
c=sum(a.*b)
disp(c)
```

iii) Avec, pour tout k dans $\mathbb{N}^*$, $a_k = \dfrac{x^k}{k}$, et, pour tout k dans $\mathbb{N}$, $b_k = x^k$, on obtient, après simplification : $c_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) x^n$.

Partie 2 : étude d'une fonction définie comme somme de série

4) a) Grâce aux résultats de la question 3b) et de la question 3c) iii), on a :

$$\forall x \in [0;1[, \ \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) x^n = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right)$$

b) D'après la question 2d), on a $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$ et on sait que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$, d'où : $\forall x \in [0;1[, \ \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) x^n = \frac{-\ln(1-x)}{1-x}$.

5) a) En étudiant la fonction h qui, à tout réel u de $\mathbb{R}_+^*$ associe $u - \ln u$, on trouve : $\forall u > 0$, $h(u) \geq 1$. A fortiori, h est positive, donc : $\forall u > 0, \ \ln u \leq u$.

b) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a, d'après ce qui précède : $(\ln n) x^n \leq n x^n$.
Comme x appartient à $]-1\,;1[$, la série de terme général nx^n est convergente (série proportionnelle à la série géométrique dérivée de raison x). D'après le critère de comparaison pour les séries à termes positifs, on conclut que la série de terme général $(\ln n) x^n$ converge.

6) a) Grâce à la question 1c), on a : $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) x^n - x^n \leq (\ln n) x^n \leq \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) x^n$. On peut sommer pour n allant de 1 à $+\infty$ car les séries en jeu convergent et on trouve :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} x^n \leq f(x) \leq \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) x^n$$

On a bien : $\forall x \in [0;1[, \ \dfrac{-\ln(1-x)}{1-x} - \dfrac{x}{1-x} \leq f(x) \leq \dfrac{-\ln(1-x)}{1-x}$

b) Pour tout x élément de $[0;1[$, on a :

$$1 + \frac{x}{\ln(1-x)} \leq \frac{f(x)}{\dfrac{-\ln(1-x)}{1-x}} \leq 1$$

On a $\lim\limits_{x\to1^-}\left(1+\dfrac{x}{\ln(1-x)}\right)=1$ et par encadrement, on conclut : $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{f(x)}{\dfrac{-\ln(1-x)}{1-x}}=1$.

Conclusion : $f(x)\underset{1^-}{\sim}\dfrac{-\ln(1-x)}{1-x}$.

7) a) Si on se donne deux réels x et y éléments de $[0\,;1[$ tels que $x\le y$, alors on a : $(\ln n)\,x^n\le(\ln n)\,y^n$. En sommant, on trouve $f(x)\le f(y)$.

Conclusion : f est croissante sur $[0\,;1[$.

b) On a $f(0)=0$ et $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{-\ln(1-x)}{1-x}=+\infty$.

On a donc le tableau de variations suivant :

$$\begin{array}{c|ccc||}
x & 0 & & 1 \\
\hline
 & & & +\infty \\
f & & \nearrow & \\
 & 0 & &
\end{array}$$

8) a) • Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 on a $\ln n\ge0$ et pour tout x de $[0\,;1[$, on a $x^n\ge0$ donc $f(x)\ge0$.

• Le premier terme de la somme définissant $f(x)$ étant nul, on a $f(x)=\sum\limits_{n=2}^{+\infty}(\ln n)x^n$, et avec 5a), on en déduit : $f(x)\le\sum\limits_{n=2}^{+\infty}n\,x^n$.

On trouve bien :

$$\forall x\in[0\,;1[,\ 0\le f(x)\le\frac{x}{(1-x)^2}-x$$

b) • Comme $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x}{(1-x)^2}=\lim\limits_{x\to0^+}x=0$, alors $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=0=f(0)$. On en déduit que f est continue à droite en 0.

• En divisant par $x>0$ l'encadrement obtenu à la question 8a), on obtient :

$$0\le\frac{f(x)}{x}\le\frac{1}{(1-x)^2}-1$$

On obtient, toujours par encadrement : $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=0$.

Conclusion : f est dérivable à droite en 0 et $f_d'(0)=0$.

c) La fonction f est continue sur $[0\,;1[$ donc l'intégrale $\int_0^1 f(x)\,dx$ est impropre en 1, où l'on dispose de l'équivalent : $f(x) \underset{1^-}{\sim} \dfrac{-\ln(1-x)}{1-x}$.

Grâce au critère d'équivalence pour les intégrales de fonctions continues et positives, $\int_0^1 f(x)\,dx$ a même nature que $\int_0^1 \dfrac{-\ln(1-x)}{1-x}\,dx$.

Pour tout $a \in [0\,;1[$, on a $\int_0^a \dfrac{-\ln(1-x)}{1-x}\,dx = \left[\dfrac{(\ln(1-x))^2}{2}\right]_0^a = \dfrac{(\ln(1-a))^2}{2}$ et $\lim\limits_{a\to 1^-} \dfrac{(\ln(1-a))^2}{2} = +\infty$ donc l'intégrale $\int_0^1 \dfrac{-\ln(1-x)}{1-x}\,dx$ diverge et, par conséquent $\int_0^1 f(x)\,dx$ diverge aussi.

Concours d'admission sur classes préparatoires
Option scientifique

RAPPORT DU JURY
ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES
2020

Présentation de l'épreuve :

- Le sujet balayait largement le programme et la diversité des thèmes abordés a permis à tous les candidats de s'exprimer et de montrer leurs compétences, ne serait-ce que sur une partie du programme.
- Des questions d'informatique étaient proposées dans l'exercice 2 (probabilités) et le problème (analyse).
- Dans l'ensemble, les correcteurs ont trouvé le sujet bien adapté au public concerné, mais comportant, comme d'habitude, quelques questions particulièrement difficiles (exercice 3 et partie 3 du problème notamment) où seuls les très bons candidats ont pu tirer leur épingle du jeu en montrant leur capacité à mener un calcul compliqué à son terme ainsi que leur faculté à raisonner sur des situations abstraites. Un correcteur signale que le sujet a dû paraître assez « impressionnant » (au moins en première lecture) pour des élèves moyens à faibles.

Description du sujet :

L'exercice 1 comptait pour environ 17% du total.

Le début de cet exercice a été traité de façon correcte par un assez grand nombre de candidats, mais de nombreux autres se sont perdus dans des calculs inutiles et parfois vains dans les deux dernières questions.

Les notations pour les dérivées partielles sont fixées par le programme, il faut donc les respecter au lieu d'utiliser des notations désuètes, fantaisistes, voire incompréhensibles.

L'exercice 2 comptait pour environ 28% du total

Malgré la nouveauté du concept d'ordre de convergence pour les candidats, cet exercice a été le mieux réussi, les candidats ayant manifestement investi sur cette partie du programme de deuxième année (variables à densité et estimation).

L’exercice 3 comptait pour environ 19% du total

Cet exercice a été abordé avec des fortunes très diverses et c’est globalement le moins bien réussi, car la plupart des questions, très abstraites, ont déstabilisé nombre de candidats : les connaissances en algèbre linéaire sont décidément bien fragiles.

Le problème comptait pour environ 36% du total

Plusieurs correcteurs remarquent que la notion de série est mal maîtrisée par un certain nombre de candidats, qui confondent souvent série et somme de série et qui écrivent des sommes infinies sans aucune justification d'existence. Cela dit, le problème a été abordé par de nombreux candidats.

Conclusion :

Comme l’an dernier, le niveau est très hétérogène et l’impression générale ressentie à la lecture des copies amène à penser que les questions les plus subtiles, qui demandent une compréhension fine de la théorie, quel que soit le domaine concerné, échappent à presque tous les candidats. La plupart d’entre eux ont acquis des techniques et des réflexes mais ne comprennent pas forcément en profondeur ce qu’ils font.

Les copies sont, dans l'ensemble, bien présentées et bien rédigées mais il reste, en assez grand nombre (10% environ), des candidats qui rendent pratiquement un brouillon, truffent leur copie d’abréviations non officielles, proposent des copies sales et raturées, parfois sans les numéros des questions traitées ou avec des numéros fantaisistes (avec la numérisation des copies, c’est réellement un "jeu dangereux").

Un correcteur remarque que certains candidats, à dessein ou non, pratiquent une écriture ambiguë dans laquelle il est, par exemple, difficile de distinguer les y des z, les 1 des 2 (exercice 1) ou encore les a des α (exercice 2), et, pour finir, les u des x et des n (problème question 5b) : une telle confusion ne joue, bien évidemment jamais, en faveur du candidat.

Les membres du jury signalent qu’un petit nombre de candidats ont fait preuve d'une malhonnêteté assez mal dissimulée (malheureusement pour eux !).

A contrario, il convient de saluer une grande majorité de copies particulièrement honnêtes !

Rappelons, une fois encore, que la simplicité, la précision et la rigueur sont des vertus attendues par tous les correcteurs sans exception, et qu’une bonne réponse est toujours une réponse construite rigoureusement.