CONCOURS PREMASTER EDHEC

SAMEDI 10 AVRIL 2021

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Durée de l'épreuve : 3 heures

Coefficient : 4

Aucun document ou matériel électronique n'est autorisé.

Le sujet comporte 3 exercices indépendants

Consignes

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

A l'issue de chaque composition écrite, tout candidat est tenu sous peine d'élimination, de remettre au surveillant une copie (même blanche, qui sera alors signée). La seule responsabilité du candidat est engagée dans le cas contraire. Tout candidat sortant avant la fin des épreuves doit obligatoirement remettre le sujet en même temps que sa copie.

Exercice 1

Si k est un entier naturel non nul, alors pour tout endomorphisme f d'un $\mathbb{R}$- espace vectoriel E, on note $f^k = \underbrace{f \circ \ldots \circ f}_{k \text{ termes}}$ et on pose $f^0 = Id_E$, où Id_E est l'endomorphisme identité de E.

On dit que l'endomorphisme f est nilpotent d'indice k ($k \in \mathbb{N}^*$) si l'on a :

$$f^k = 0 \text{ et } f^{k-1} \neq 0$$

On note I_2 la matrice identité de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et on dit qu'une matrice A de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est nilpotente d'indice k ($k \in \mathbb{N}^*$) si l'on a $A^k = 0$ et $A^{k-1} \neq 0$ (avec la convention $A^0 = I_2$).

Partie 1

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice non nulle de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1) Calculer $A^2 - (a+d)A$ en fonction de I_2.

2) On suppose dans cette question que A est nilpotente d'indice k.
   a) Établir l'égalité : $ad - bc = 0$.
   b) Montrer que k est supérieur ou égal à 2.
   c) En déduire alors que $a + d = 0$.

3) Conclure que : A nilpotente $\Leftrightarrow A^2 = 0$.

Partie 2

On considère dans cette partie un endomorphisme f non nul d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension 2.

4) a) Montrer que, si $\operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Im}(f)$, alors on a : $f^2 = 0$.
   b) On suppose que $f^2 = 0$. Montrer que $\operatorname{Im}(f) \subset \operatorname{Ker}(f)$. Établir que $\operatorname{rg}(f) = 1$ puis conclure que $\operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Im}(f)$.
   c) En déduire, à l'aide de la partie 1, l'équivalence :

$$f \text{ nilpotent} \Leftrightarrow \operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Im}(f)$$

On suppose dans toute la suite que f est nilpotent et on en étudie quelques propriétés.

5) Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice A de f est : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

6) On souhaite montrer par l'absurde qu'il est impossible de trouver deux endomorphismes u et v de E, nilpotents et tels que $f = u \circ v$. On suppose donc que ces deux endomorphismes existent.
   a) Montrer les inclusions : $\operatorname{Im}(f) \subset \operatorname{Im}(u)$ et $\operatorname{Ker}(v) \subset \operatorname{Ker}(f)$.
   b) En déduire les égalités : $\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Im}(u)$ et $\operatorname{Ker}(v) = \operatorname{Ker}(f)$.
   c) En déduire l'égalité : $\operatorname{Ker}(u) = \operatorname{Im}(v)$.
   d) Conclure.

Exercice 2

On rappelle que, par convention, on a $\binom{j}{i} = 0$ si $i > j$.

1) Montrer la formule classique, dite de Pascal :

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*,\ \binom{j}{i} = \binom{j-1}{i} + \binom{j-1}{i-1}$$

On désigne par b et n deux entiers naturels non nuls.
Une urne contient b boules blanches et n boules noires et l'on y effectue des tirages de boules, une par une et sans remise.
On note Z la variable aléatoire égale au nombre total de boules tirées lorsque l'on obtient la dernière boule noire (Z est donc le rang d'apparition de la n-ième boule noire).
On note X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches restant dans l'urne quand pour la première fois l'urne ne contient plus aucune boule noire.

2) On étudie, dans cette question seulement, le cas où $b=1$.
   a) Déterminer $Z(\Omega)$.
   b) Déterminer la probabilité $P(Z=n)$.
   c) En déduire la loi de Z ainsi que son espérance.
   d) Vérifier que X suit une loi de Bernoulli et en donner le paramètre.

Dans toute la suite, on revient au cas général

3) a) Déterminer $Z(\Omega)$.
   b) Pour tout entier naturel k inférieur ou égal à b, on note $A_{n,k}$ l'événement : « on a obtenu $(n-1)$ boules noires en $(n+k-1)$ tirages ». Montrer que $P(A_{n,k})=(b-k+1)\dfrac{\binom{n+k-1}{n-1}}{\binom{n+b}{n}}$.
   c) En notant N_{n+k} l'événement « on obtient une boule noire au $(n+k)$-ième tirage », écrire l'événement $(Z=n+k)$ en fonction des événements $A_{n,k}$ et de l'événement N_{n+k}.
   d) En déduire l'égalité :

$$\forall k \in [\![0,b]\!],\ P(Z=n+k)=\frac{\binom{n+k-1}{n-1}}{\binom{n+b}{n}}$$

4) a) Établir l'égalité suivante : $\displaystyle\sum_{j=n}^{n+b}\binom{j}{n}=\binom{n+b+1}{n+1}$.
   b) Montrer que : $\forall (k,n)\in \mathbb{N}\times\mathbb{N}^*,\ (n+k)\binom{n+k-1}{n-1}=n\binom{n+k}{n}$.
   c) En écrivant $E(Z)=\displaystyle\sum_{k=0}^{b}(n+k)P(Z=n+k)$, montrer que l'espérance de Z est donnée par :

$$E(Z)=\frac{n(n+b+1)}{n+1}$$

5) a) Écrire la relation liant les deux variables aléatoires X et Z.
   b) En déduire l'espérance de X.

Exercice 3

Partie 1

Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2}(\cos t)^n\,dt$.

1) a) Calculer u_0 et u_1.
   b) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
   c) Établir que : $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n>0$.

2) a) Montrer, grâce à une intégration par parties, que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $(n+2)u_{n+2} = (n+1)u_n$.

b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{2n} = \dfrac{(2n)!}{(2^n \times n!)^2} \times \dfrac{\pi}{2}$.

c) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $(n+1)u_{n+1}u_n = \dfrac{\pi}{2}$.

d) En déduire la valeur de u_{2n+1}.

3) a) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+2}}{u_n}$.

b) En déduire, par encadrement, que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1$.

c) Montrer enfin que $u_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

Partie 2

On note *f* la fonction définie pour tout réel *x* par : $f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{si } \ 0 \le x \le \pi/2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

4) Vérifier que *f* est une densité de probabilité. Dans la suite, on considère une variable aléatoire réelle *X* définie sur un certain espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, et ayant *f* pour densité.

5) Déterminer la fonction de répartition *F* de la variable aléatoire *X*.

6) a) Montrer que *X* possède une espérance et la calculer.
b) Montrer que *X* possède également une variance et la calculer.

7) On considère maintenant une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires toutes définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, mutuellement indépendantes et qui suivent toutes la même loi que *X*.
Pour tout entier naturel *n* supérieur ou égal à 2, on pose $I_n = \min(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ et on admet que I_n est une variable aléatoire à densité, elle aussi définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

a) Déterminer la fonction de répartition, notée F_n, de la variable aléatoire I_n.

b) La suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge-t-elle en loi ?

c) Déterminer une densité de I_n, puis montrer que I_n possède un moment d'ordre 2 :

$$E\left(I_n^2\right) = 2\int_0^{\pi/2} x(\cos x)^n \, dx$$

d) Établir que : $E\left(I_n^2\right) \le \pi u_n$.

e) En déduire que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers une variable aléatoire dont on précisera la loi.

8) Soit *h* la restriction de la fonction cosinus à $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

a) Montrer que *h* réalise une bijection de $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ sur $[0,1]$.

b) Justifier que l'on peut poser $Y = h(X)$. On admet alors que *Y* est une variable aléatoire, elle aussi définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Déterminer la fonction de répartition *G* de *Y*, puis vérifier que *Y* suit une loi uniforme.

CONCOURS PREMASTER EDHEC

SAMEDI 10 AVRIL 2021

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

CORRIGÉ

Exercice 1

Partie 1 : préliminaires

1) On a $A^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+bc & b(a+d) \\ c(a+d) & bc+d^2 \end{pmatrix}$.

$$A^2-(a+d)A = \begin{pmatrix} a^2+bc & b(a+d) \\ c(a+d) & bc+d^2 \end{pmatrix} - (a+d)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

$$A^2-(a+d)A = \begin{pmatrix} a^2+bc-a^2-ad & 0 \\ 0 & bc+d^2-ad-d^2 \end{pmatrix} = (bc-ad)I_2$$

Finalement :

$$\boxed{A^2-(a+d)A = -(ad-bc)I_2}$$

2) a) Par l'absurde, si l'on avait $ad-bc\neq 0$, la matrice A serait inversible (c'est du cours) et en multipliant les deux membres de l'égalité $A^k=0$ par A^{-1}, on aurait $A^{k-1}=0$, ce qui est contraire à l'hypothèse concernant A.
Conclusion :

$$\boxed{ad-bc=0}$$

2) b) Comme A n'est pas la matrice nulle, on n'a pas $A^1=0$, ce qui montre que k n'est pas égal à 1 et comme k est un entier naturel non nul :

$$\boxed{k \text{ est supérieur ou égal à } 2}$$

2) c) Grâce aux questions 1) et 2a), on a :

$$A^2=(a+d)A$$

Comme k est supérieur ou égal à 2, on peut multiplier cette égalité par A^{k-2} et on obtient :

$$A^k=(a+d)A^{k-1}$$

On sait que $A^k=0$ donc il reste : $(a+d)A^{k-1}=0$. Comme $A^{k-1}\neq 0$, on en déduit :

$$\boxed{a+d=0}$$

3) En injectant les résultats obtenus aux questions 2a) et 2c) dans l'égalité $A^2-(a+d)A=-(ad-bc)I_2$, on trouve : $A^2=0$.

On vient de montrer que, si A est nilpotente, alors $A^2=0$.

Réciproquement, si $A^2=0$, la matrice A est bien sûr nilpotente (d'indice 2) d'où l'équivalence :

$$\boxed{A \text{ nilpotente} \Leftrightarrow A^2=0}$$

Partie 2

4) a) Supposons $\mathrm{Ker}(f)=\mathrm{Im}(f)$.

Pour tout x de E, on a $f^2(x)=f(f(x))$, mais, par définition de $\mathrm{Im}(f)$, $f(x)$ appartient à $\mathrm{Im}(f)$ donc, par hypothèse, à $\mathrm{Ker}(f)$, et ainsi $f(f(x))=0$. On a donc : $f^2=0$.

4) b) Réciproquement, supposons $f^2=0$.

Pour tout x de $\mathrm{Im}(f)$, il existe t élément de E tel que $x=f(t)$. On a alors $f(x)=f^2(t)=0$ donc x appartient à $\mathrm{Ker}(f)$. On a donc $\mathrm{Im}(f)\subset\mathrm{Ker}(f)$.

De plus, on a $\mathrm{rg}(f)\neq 0$ car f est non nul et si l'on avait $\mathrm{rg}(f)=2$, l'inclusion précédente donnerait $\dim\mathrm{Ker}(f)\geq 2$ et le théorème du rang se trouverait contredit (en effet, on aurait

$\mathrm{rg}(f)+\dim\mathrm{Ker}(f)\geq 4$), on a donc $\mathrm{rg}(f)=1$. D'après le théorème du rang, on en déduit $\dim\mathrm{Ker}(f)=2-1=1$.

Pour finir, on a $\mathrm{Im}(f)\subset\mathrm{Ker}(f)$ et $\dim\mathrm{Ker}(f)=\dim\mathrm{Im}(f)$ donc :

$$\mathrm{Ker}(f)=\mathrm{Im}(f)$$

4) c) D'après les questions 4a) et 4b), on vient de montrer l'équivalence :

$$f^2=0\Leftrightarrow \mathrm{Ker}(f)=\mathrm{Im}(f)$$

Comme f est un endomorphisme non nul d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension 2, on a, d'après la première partie, l'équivalence : f nilpotent $\Leftrightarrow f^2=0$.

Finalement :

$$\boxed{f \text{ nilpotent} \Leftrightarrow \mathrm{Ker}(f)=\mathrm{Im}(f)}$$

5) Comme $\mathrm{Im}(f)$ est de dimension 1, on considère une base (e_1) de $\mathrm{Im}(f)$, et par définition de $\mathrm{Im}(f)$, il existe un vecteur e_2 tel que $e_1=f(e_2)$.

Montrons que la famille (e_1,e_2) est une base de *E* en montrant d'abord que c'est une famille libre.

Si l'on se donne deux réels α_1 et α_2 tels que $\alpha_1e_1+\alpha_2e_2=0$, alors en appliquant *f*, on obtient $\alpha_1f(e_1)+\alpha_2f(e_2)=f(0)$ et, par linéarité de *f* : $\alpha_1f(e_1)+\alpha_2f(e_2)=0$.

Comme $e_1=f(e_2)$, on a $f(e_1)=f^2(e_2)=0$ (car f^2 est l'endomorphisme nul) et il reste : $\alpha_2e_1=0$. Pour finir, (e_1) est une base de $\mathrm{Im}(f)$ donc e_1 n'est pas le vecteur nul et on peut conclure : $\alpha_2=0$. En remplaçant dans $\alpha_1e_1+\alpha_2e_2=0$, il reste alors $\alpha_1e_1=0$ et e_1 n'étant pas le vecteur nul, on peut conclure : $\alpha_1=0$.

Bilan : la famille (e_1,e_2) est une famille libre de deux vecteurs de *E* et *E* est de dimension 2 donc c'est une base de *E*.

On a $f(e_1)=f^2(e_2)=0$ et $f(e_2)=e_1$ donc :

$$\boxed{\text{La matrice de } f \text{ dans la base } (e_1,e_2) \text{ est : } A=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}}$$

6) a) On suppose qu'il existe deux endomorphismes *u* et *v* de *E*, nilpotents, tels que $f=u\circ v$.

- Soit y un élément de $\mathrm{Im}(f)$, il existe un vecteur x de E tel que $y=f(x)$, ce qui s'écrit :

$$y=(u\circ v)(x)=u(v(x))$$

Le vecteur $v(x)$ appartient à E et y est l'image du vecteur $v(x)$ par u donc y appartient à $\operatorname{Im}(u)$.

$$\boxed{\operatorname{Im}(f) \subset \operatorname{Im}(u)}$$

- Soit x un vecteur de $\operatorname{Ker}(v)$, on a $v(x)=0$ et, en appliquant u, on trouve $u(v(x))=u(0)=0$, ce qui s'écrit $(u \circ v)(x)=0$ ou encore $f(x)=0$. Ceci montre que x appartient à $\operatorname{Ker}(f)$.

$$\boxed{\operatorname{Ker}(v) \subset \operatorname{Ker}(f)}$$

6) b) L'endomorphisme u n'est pas l'endomorphisme nul (sinon, f serait aussi l'endomorphisme nul) et u est nilpotent, donc d'après le travail fait à la question 3), on a $u^2=0$, puis avec la question 4b), on obtient : $\operatorname{rg}(u)=1$.

Comme $\operatorname{rg}(f)=1$, on a l'inclusion $\operatorname{Im}(f) \subset \operatorname{Im}(u)$ et l'égalité des dimensions donc :

$$\boxed{\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Im}(u)}$$

De la même façon, on a $\dim\operatorname{Ker}(f)=1$ et $\dim\operatorname{Ker}(v)=1$ donc, ici aussi on a l'inclusion $\operatorname{Ker}(v) \subset \operatorname{Ker}(f)$ avec égalité des dimensions donc :

$$\boxed{\operatorname{Ker}(v) = \operatorname{Ker}(f)}$$

c) Comme $\operatorname{Ker}(f)=\operatorname{Im}(f)$, les deux égalités précédentes donnent : $\operatorname{Im}(u)=\operatorname{Ker}(v)$.

Avec le résultat de la question 4c) appliqué à u et à v (qui ne sont pas nuls), on a d'une part $\operatorname{Ker}(v)=\operatorname{Im}(v)$, ce qui permet d'avoir $\operatorname{Im}(u)=\operatorname{Im}(v)$ et on a, d'autre part, $\operatorname{Ker}(u)=\operatorname{Im}(u)$, ce qui permet enfin d'obtenir :

$$\boxed{\operatorname{Ker}(u) = \operatorname{Im}(v)}$$

d) Pour tout x de E, on a $f(x)=(u \circ v)(x)=u(v(x))$.

Comme $v(x)$ appartient à $\operatorname{Im}(v)$, l'égalité obtenue à la question 6c) prouve que $v(x)$ appartient à $\operatorname{Ker}(u)$ et on obtient : $\forall x \in E, f(x)=0$.

Ceci contredit le fait que f n'est pas l'endomorphisme nul donc il est impossible de trouver deux endomorphismes u et v de E, nilpotents tels que $f=u \circ v$.

Exercice 2

1) Soit i et j deux entiers naturels non nuls.

- Cas $i < j$.

$$\binom{j-1}{i} + \binom{j-1}{i-1} = \frac{(j-1)!}{i!\,(j-1-i)!} + \frac{(j-1)!}{(i-1)!\,(j-i)!} \quad \text{car } i \leq j-1 \text{ et } i-1 \leq j-1$$
$$= \frac{(j-i)\times(j-1)! + i\times(j-1)!}{i!\,(j-i)!}$$
$$= \frac{(j-i+i)\times(j-1)!}{i!\,(j-i)!}$$
$$= \frac{j\times(j-1)!}{i!\,(j-i)!}$$
$$= \frac{j!}{i!\,(j-i)!}$$
$$= \binom{j}{i} \quad \text{car } i \leq j$$

- Cas $i = j$.

On a $\binom{j-1}{i} + \binom{j-1}{i-1} = \binom{j-1}{j} + \binom{j-1}{j-1} = 0 + 1 = 1$ (car $j > j-1$) et on a aussi $\binom{j}{i} = \binom{j}{j} = 1$ donc l'égalité demandée est donc bien vérifiée dans ce cas.

- Cas $i > j$.

On a $\binom{j-1}{i} + \binom{j-1}{i-1} = 0 + 0 = 0$ car $i > j-1$ et $i-1 > j-1$ et on a aussi $\binom{j}{i} = 0$ car $i > j$. L'égalité est donc encore bien vérifiée dans ce dernier cas.

On peut ainsi conclure :

$$\boxed{\forall (i,j) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*, \binom{j-1}{i} + \binom{j-1}{i-1} = \binom{j}{i}}$$

2) Si $b = 1$, alors l'urne contient $n+1$ boules : n noires et une blanche.

a) Si les n premiers tirages ont amené des boules noires, alors la n-ème boule noire est tirée au n-ème tirage et donc Z prend la valeur n.

Sinon, les n premiers tirages ont amené une boule blanche et $(n-1)$ boules noires. Le $(n+1)$-ème tirage amène alors la dernière boule noire et Z prend la valeur $(n+1)$.

On peut donc conclure :

$$\boxed{Z(\Omega) = \{n, n+1\}}$$

b) La n-ième boule noire est tirée au n-ième tirage dans le seul cas où les n premiers tirages ont amené les n boules noires. En notant N_i l'événement : « la i-ième boule tirée est noire », $i \in \mathbb{N}^*$, on a donc :

$$P(Z=n)=P\left(\bigcap_{i=1}^{n} N_i\right)$$

D'après la formule des probabilités composées :

$$P(Z=n)=P(N_1)P_{N_1}(N_2)P_{N_1\cap N_2}(N_3)\dots P_{N_1\cap\dots\cap N_{n-1}}(N_n)$$

D'où :

$$P(Z=n)=\frac{n}{n+1}\times\frac{n-1}{n}\times\frac{n-2}{n-1}\times\dots\times\frac{1}{2}=\frac{n!}{(n+1)!}=\frac{1}{n+1}$$

Conclusion :

$$\boxed{P(Z=n)=\frac{1}{n+1}}$$

c) Puisque $Z(\Omega)=\{n,n+1\}$, alors

$$P(Z=n+1)=1-P(Z=n)=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$$

Conclusion :

$$\boxed{Z(\Omega)=\{n,n+1\}\quad\text{et}\quad P(Z=n)=\frac{1}{n+1}\ ;\ P(Z=n+1)=\frac{n}{n+1}}$$

On a donc :

$$E(Z)=nP(Z=n)+(n+1)P(Z=n+1)=n\times\frac{1}{n+1}+(n+1)\times\frac{n}{n+1}$$
$$=\frac{n+(n+1)n}{n+1}=\frac{n(n+2)}{n+1}$$

Conclusion :

$$\boxed{E(Z)=\frac{n(n+2)}{n+1}}$$

d) Il reste une boule blanche une fois qu'on a vidé l'urne de ses n boules noires dans le seul cas où les n premières boules tirées ont été les n boules noires, c'est-à-dire que $[X=1]=[Z=n]$. On a donc, d'après la question 2.b) :

$$P(X=1)=P(Z=n)=\frac{1}{n+1}$$

Or, on a clairement $X(\Omega)=\{0,1\}$ donc X est une variable de Bernoulli. On peut alors conclure, d'après le calcul précédent, que :

$$\boxed{X\text{ suit la loi de Bernoulli }\mathcal{B}\left(\frac{1}{n+1}\right)}$$

3) a) Il faut au minimum n tirages pour tirer la n-ème boule noire et il y a $(n+b)$ boules au total dans l'urne, donc au maximum, il faut $(n+b)$ tirages pour tirer la n-ème boule noire. On en déduit, dans un premier temps, que $Z(\Omega)\subset[\![n,n+b]\!]$.

Réciproquement, pour un entier k de $[\![n, n+b]\!]$, $[Z = k]$ est réalisé lorsque, par exemple, les $(k-n)$ premières boules tirées ont été blanches et les n suivantes ont été noires, donc $[\![n, n+b]\!] \subset Z(\Omega)$.

Bilan :

$$\boxed{Z(\Omega) = [\![n, n+b]\!]}$$

b) Dénombrons les cas possibles relativement à l'expérience considérée ici, c'est-à-dire le tirage des $(n+k-1)$ premières boules :

- Il y a $(n+b)$ façons de tirer la $1^{\text{ère}}$ boule parmi toutes les boules de l'urne ;
- Pour chacun de ces cas, il y a $(n+b-1)$ façons de tirer la $2^{\text{ème}}$ boule ;
- Pour chacun de ces cas, il y a $(n+b-2)$ façons de tirer la $3^{\text{ème}}$ boule ;

Ainsi de suite jusqu'à la $(n+k-1)^{\text{ème}}$ boule :

- Il y a $(n+b-(n+k-1)+1) = b-k+2$ façons de tirer la $(n+k-1)^{\text{ème}}$ boule.

On en déduit qu'il y a au total $(n+b)(n+b-1)(n+b-2)\ldots(b-k+2)$ façons de tirer les $(n+k-1)$ premières boules.

Parmi les tirages des $(n+k-1)$ premières, dénombrons les cas réalisant l'événement $A_{n,k}$:

- Il y a $\binom{n+k-1}{n-1}$ façons de choisir les emplacements des $(n-1)$ boules noires ;
- Pour un tel emplacement, il y a $n \times (n-1) \times \cdots \times 2 = n!$ façons de placer les $(n-1)$ boules noires ;
- Les boules noires étant placées, il y a $b \times (b-1) \times \cdots \times (b-k+1)$ façons de placer les k boules blanches.

On a donc, par équiprobabilité des tirages :

$$P(A_{n,k}) = \frac{\binom{n+k-1}{n-1} n!\, b \times (b-1) \times \cdots \times (b-k+1)}{(n+b)(n+b-1)(n+b-2)\ldots(b-k+2)}$$

Simplifions un peu l'expression :

$$P(A_{n,k}) = \binom{n+k-1}{n-1} n! \frac{\frac{b!}{(b-k)!}}{\frac{(n+b)!}{(b-k+1)!}} = \binom{n+k-1}{n-1} \frac{\frac{(b-k+1)!}{(b-k)!}}{\frac{(n+b)!}{n!\,b!}}$$
$$= \binom{n+k-1}{n-1} \frac{b-k+1}{\binom{n+b}{n}}$$

Conclusion :

$$\boxed{P(A_{n,k}) = (b-k+1) \frac{\binom{n+k-1}{n-1}}{\binom{n+b}{n}}}$$

Remarque. On pouvait aussi se référer à la loi hypergéométrique puisque, tant qu'on ne s'intéresse qu'au nombre de boules noires tirées et pas à leur ordre d'apparition, les tirages successifs sans remise sont équivalents à un tirage simultané. Dès lors, on obtient :

$$P\left(A_{n,k}\right)=\frac{\binom{n}{n-1}\binom{b}{k}}{\binom{n+b}{n+k-1}}$$

On a alors :

$$P\left(A_{n,k}\right)=\frac{nb!(n+k-1)!(b-k+1)!}{k!(b-k)!(n+b!)}=(b-k+1)\frac{nb!(n+k-1)!}{k!(n+b!)}\times\frac{(n-1)!}{(n-1)!}.$$

$$P\left(A_{n,k}\right)=(b-k+1)\frac{b!\,n!}{(n+b!)}\times\frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}=(b-k+1)\frac{\binom{n+k-1}{n-1}}{\binom{n+b}{n}}.$$

c) Dire que l'on a tiré la n-ème boule noire au $(n+k)$-ème tirage, c'est dire que, lors des $(n-k+1)$ premiers tirages, on a tiré $(n-1)$ boules noires et qu'au $(n+k)$-ème tirage, on a tiré une boule noire :

$$\boxed{[Z=n+k]=A_{n,k}\cap N_{n+k}}$$

3) d) On a alors :

$$P(Z=n+k)=P\left(A_{n,k}\cap N_{n+k}\right)=P\left(A_{n,k}\right)P_{A_{n,k}}(N_{n+k})$$

Or, $P\left(A_{n,k}\right)$ a été calculé à la question précédente et, si $A_{n,k}$ est réalisé, alors il reste au total dans l'urne $n+b-(n+k-1)=b-k+1$ boules, parmi lesquelles une boule noire. On a donc, par équiprobabilité : $P_{A_{n,k}}(N_{n+k})=\frac{1}{b-k+1}$.

Finalement,

$$P(Z=n+k)=(b-k+1)\frac{\binom{n+k-1}{n-1}}{\binom{n+b}{n}}\times\frac{1}{b-k+1}=\frac{\binom{n+k-1}{n-1}}{\binom{n+b}{n}}$$

Bilan :

$$\boxed{\forall k\in[\![0,b]\!],P(Z=n+k)=\frac{\binom{n+k-1}{n-1}}{\binom{n+b}{n}}}$$

4.a) L'entier $n+1$ étant non nul et, pour tout entier $j\in[\![n,n+b]\!]$, $j+1$ étant donc non nul, on peut appliquer la formule de Pascal : $\binom{j+1}{n+1}=\binom{j}{n+1}+\binom{j}{n}$.

On en tire $\binom{j}{n}=\binom{j+1}{n+1}-\binom{j}{n+1}$ et on a donc :

$$\sum_{j=n}^{n+b}\binom{j}{n}=\sum_{j=n}^{n+b}\binom{j+1}{n+1}-\sum_{j=n}^{n+b}\binom{j}{n+1}$$

On change d'indice dans la première somme :

$$\sum_{j=n}^{n+b}\binom{j}{n}=\sum_{j=n+1}^{n+b+1}\binom{j}{n+1}-\sum_{j=n}^{n+b}\binom{j}{n+1}$$

Les sommes se télescopent :

$$\sum_{j=n}^{n+b}\binom{j}{n}=\binom{n+b+1}{n+1}-\binom{n}{n+1}=\binom{n+b+1}{n+1}\quad\left(\text{car }\binom{n}{n+1}=0\right)$$

On a donc bien :

$$\boxed{\sum_{j=n}^{n+b}\binom{j}{n}=\binom{n+b+1}{n+1}}$$

b) Pour tout couple $(k,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*$, $0\leq n-1\leq n+k-1$ et donc

$$(n+k)\binom{n+k-1}{n-1}=(n+k)\times\frac{(n+k-1)!}{(n-1)!\,k!}=\frac{(n+k)!}{(n-1)!\,k!}=n\times\frac{(n+k)!}{n!\,k!}=n\binom{n+k}{n}$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall(k,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*,(n+k)\binom{n+k-1}{n-1}=n\binom{n+k}{n}}$$

c) On a $Z(\Omega)=[\![n,n+b]\!]$ donc

$$E(Z)=\sum_{k=b}^{n+b}kP(Z=k)$$

En changeant d'indice :

$$E(Z)=\sum_{k=0}^{b}(n+k)P(Z=n+k)$$

En utilisant le résultat de la question 3.d) :

$$E(Z)=\sum_{k=0}^{b}(n+k)\frac{\binom{n+k-1}{n-1}}{\binom{n+b}{n}}=\frac{1}{\binom{n+b}{n}}\sum_{k=0}^{b}(n+k)\binom{n+k-1}{n-1}$$

On en déduit, d'après le résultat de la question 4.b), que :

$$E(Z)=\frac{1}{\binom{n+b}{n}}\sum_{k=0}^{b}n\binom{n+k}{n}=\frac{n}{\binom{n+b}{n}}\sum_{k=0}^{b}\binom{n+k}{n}$$

En changeant de nouveau d'indice puis en utilisant le résultat de la question 4.a) :

$$E(Z) = \frac{n}{\binom{n+b}{n}} \sum_{k=n}^{n+b} \binom{k}{n} = \frac{n}{\binom{n+b}{n}} \times \binom{n+b+1}{n+1}$$

Il reste à simplifier un peu. On remarque que :

$$\binom{n+b+1}{n+1} = \frac{(n+b+1)!}{(n+1)!\,b!} = \frac{n+b+1}{n+1} \times \frac{(n+b)!}{n!\,b!} = \frac{n+b+1}{n+1} \binom{n+b}{n}$$

En reportant dans l'expression de l'espérance de Z :

$$E(Z) = \frac{n}{\binom{n+b}{n}} \times \frac{n+b+1}{n+1} \binom{n+b}{n} = \frac{n(n+b+1)}{n+1}$$

Conclusion :

$$\boxed{E(Z) = \frac{n(n+b+1)}{n+1}}$$

5) a) Lorsque la variable aléatoire Z prend la valeur k, $k \in [\![n, n+b]\!]$, alors la n-ème boule noire est obtenue au k-ème tirage, et ainsi $(k-n)$ boules blanches ont été tirées donc il en reste $b-(k-n)$ dans l'urne, c'est-à-dire que X prend la valeur $b-k+n$.

On a donc : $X = b - Z + n$, soit encore :

$$\boxed{X = n + b - Z}$$

b) Par linéarité de l'espérance et d'après le calcul de l'espérance de Z, on a :

$$E(X) = n + b - E(Z) = n + b - \frac{n(n+b+1)}{n+1} = \frac{(n+b)(n+1) - n(n+b+1)}{n+1} = \frac{b}{n+1}$$

Conclusion :

$$\boxed{E(X) = \frac{b}{n+1}}$$

Exercice 3

Partie 1

1) a) $u_0 = \int_0^{\pi/2} 1\,dt = \frac{\pi}{2}$.

$u_1 = \int_0^{\pi/2} \cos t\,dt = \left[\sin t\right]_0^{\pi/2} = 1$.

b) $u_{n+1} - u_n = \int_0^{\pi/2} (\cos t)^{n+1}\,dt - \int_0^{\pi/2} (\cos t)^n\,dt$.

Par linéarité de l'intégration, on obtient : $u_{n+1} - u_n = \int_0^{\pi/2} (\cos t)^n (\cos t - 1)\,dt$.

Comme $\cos t$ est positif sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et comme $\cos t - 1$ est négatif, on a, les bornes de l'intégrale étant dans l'ordre croissant : $u_{n+1} - u_n \leq 0$.

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est décroissante}}$$

c) On a : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \int_0^{\pi/2} (\cos t)^n \, dt$. Comme la fonction cosinus est continue, positive et non identiquement nulle, le théorème de stricte positivité de l'intégrale assure que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0}$$

2) a) Dans l'intégrale définissant u_{n+2}, on pose : $u(t) = (\cos t)^{n+1}$ et $v'(t) = \cos t$. On peut alors choisir $v(t) = \sin t$ et on a : $u'(t) = -(n+1)(\cos t)^n \sin t$.

Les fonctions u et v étant de classe C^1 sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, l'intégration par parties est licite et on trouve :

$$u_{n+2} = \left[\sin t (\cos t)^{n+1}\right]_0^{\pi/2} + (n+1)\int_0^{\pi/2} \sin^2 t (\cos t)^n \, dt$$

Le crochet est nul car $\sin 0 = 0$ et $\left(\cos\frac{\pi}{2}\right)^{n+1} = 0$, puisque $n+1 \geq 1$) donc :

$$u_{n+2} = (n+1)\int_0^{\pi/2} \sin^2 t (\cos t)^n \, dt = (n+1)\int_0^{\pi/2} (1 - \cos^2 t)(\cos t)^n \, dt$$

En développant dans l'intégrale restante et, toujours par linéarité, on obtient :

$u_{n+2} = (n+1)\left(\int_0^{\pi/2} (\cos t)^n \, dt - \int_0^{\pi/2} (\cos t)^{n+2} \, dt\right)$.

$u_{n+2} = (n+1)(u_n - u_{n+2}) = (n+1)u_n - (n+1)u_{n+2}$

On trouve bien :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ (n+2)\, u_{n+2} = (n+1)\, u_n}$$

b) Procédons par récurrence.

• Pour $n = 0$, $\frac{(2\times 0)!}{(2^0 \times 0!)^2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$ et $u_0 = \frac{\pi}{2}$ (d'après la 1re question) donc $u_0 = \frac{(2\times 0)!}{(2^0 \times 0!)^2} \times \frac{\pi}{2}$.

• Si l'on suppose que, pour un certain n de $\mathbb{N}$, on a $u_{2n} = \frac{(2n)!}{(2^n \times n!)^2} \times \frac{\pi}{2}$, alors, d'après la question 2a), on trouve :

$u_{2(n+1)} = u_{2n+2} = \frac{2n+1}{2n+2} u_{2n} = \frac{2n+1}{2n+2} \times \frac{(2n)!}{(2^n \times n!)^2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2(n+1)} \times \frac{(2n+1)!}{(2^n \times n!)^2} \times \frac{\pi}{2}$.

En multipliant haut et bas par $(2n+2)$, on obtient :

$u_{2n+2} = \dfrac{2n+2}{2(n+1)(2n+2)} \times \dfrac{(2n+1)!}{(2^n \times n!)^2} \times \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{(2n+2)!}{(2^{n+1} \times (n+1)!)^2} \times \dfrac{\pi}{2}$.

On a bien montré par récurrence que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_{2n} = \frac{(2n)!}{(2^n \times n!)^2} \times \frac{\pi}{2}}$$

c) En multipliant par u_{n+1} les deux membres de l'égalité trouvée à la question 2a), on a :

$\forall n \in \mathbb{N},\ (n+2)\ u_{n+2}\ u_{n+1} = (n+1)\ u_{n+1}\ u_n$

Si l'on pose $v_n = (n+1) u_n u_{n+1}$, ceci donne : $v_{n+1} = v_n$. La suite (v_n) est donc constante, de premier terme $v_0 = u_0 u_1 = \dfrac{\pi}{2}$, ce qui prouve que : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \dfrac{\pi}{2}$.

En d'autres termes :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ (n+1)\ u_{n+1}\ u_n = \frac{\pi}{2}}$$

d) D'après la relation précédente, en remplaçant *n* par 2 *n*, on a :

$$u_{2n+1} = \frac{\pi}{2(2n+1) u_{2n}}$$

Avec le résultat de la question 2b), on obtient : $u_{2n+1} = \dfrac{\pi}{2(2n+1)\dfrac{(2n)!}{(2^n \times n!)^2} \times \dfrac{\pi}{2}}$

Ceci se simplifie et donne :

$$\boxed{u_{2n+1} = \frac{(2^n \times n!)^2}{(2n+1)!}}$$

3) a) D'après la question 2a), on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{u_{n+2}}{u_n} = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n+1}{n+2} = 1$.

b) Comme la suite (u_n) est décroissante, on a : $u_{n+2} \le u_{n+1} \le u_n$.

En divisant les trois membres de cette double inégalité par u_n qui est strictement positif, on obtient : $\dfrac{u_{n+2}}{u_n} \le \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \le 1$.

Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{u_{n+2}}{u_n} = 1$, on a, par encadrement :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1}$$

c) Le résultat de la question 2c) peut s'écrire : $u_{n+1}\, u_n = \dfrac{\pi}{2(n+1)}$. D'après la question précédente, on sait que : $u_{n+1} \underset{+\infty}{\sim} u_n$. En prenant un équivalent de chaque côté, on obtient : $u_n^2 \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{2n}$.

En prenant la racine carrée, on en déduit : $|u_n| \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

Comme u_n est positif, on a bien :

$$\boxed{u_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}}$$

Partie 2

4) • La fonction f est nulle sur $]-\infty, 0[$ et sur $\left]\dfrac{\pi}{2}, +\infty\right[$, elle est positive sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ (elle coïncide avec la fonction sinus) donc f est positive sur $\mathbb{R}$.

• Les restrictions de la fonction f aux intervalles $]-\infty, 0[$ et $\left]\dfrac{\pi}{2}, +\infty\right[$ sont continues (fonction nulle) et la restriction de f à l'intervalle $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ est continue en tant que fonction de référence (sinus). Par conséquent f est continue sauf peut-être en 0 et en $\dfrac{\pi}{2}$.

• $\int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx = \int_{\pi/2}^{+\infty} f(x)\,dx = 0$ (aucun problème de convergence car la fonction f est nulle sur chacun de ces intervalles)

$\int_0^{\pi/2} f(x)\,dx = \int_0^{\pi/2} \sin x\,dx = [-\cos x]_0^{\pi/2} = 1$.

En conclusion, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ converge et vaut 1.

Bilan :

$$\boxed{f \text{ est une densité}}$$

5) Pour tout réel x strictement négatif, on a :

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{x} 0\,dt = 0$$

Pour tout réel x appartenant à $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, on a :

$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} 0\,dt + \int_0^{x} \sin t\,dt = [-\cos t]_0^{x} = 1 - \cos x$.

Pour tout réel x appartenant à $\left]\frac{\pi}{2},+\infty\right[$, on a :

$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} 0\,dt + \int_{0}^{\pi/2} \sin t\,dt + \int_{\pi/2}^{x} \sin t\,dt = 0 + \left[-\cos t\right]_{0}^{\pi/2} + 0$.

$F(x) = 1 - \cos\frac{\pi}{2} = 1$.

Bilan :

$$\boxed{F(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ 1-\cos x \text{ si } 0 \le x \le \pi/2 \\ 1 \text{ si } x > \pi/2 \end{cases}}$$

6) a) • On a $0 \le X \le \pi/2$ et comme la variable certaine égale à $\pi/2$ possède une espérance, alors X possède aussi une espérance par domination.

• $\int_{-\infty}^{0} x\,f(x)\,dx = \int_{\pi/2}^{+\infty} x\,f(x)\,dx = 0$ (aucun problème de convergence car la fonction f est nulle sur chacun des intervalles d'intégration).

• La fonction $x \mapsto x\,f(x)$ est continue sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, comme produit d'une fonction polynomiale et de la fonction sinus, et on a :

$$\int_{0}^{\pi/2} x\,f(x)dx = \int_{0}^{\pi/2} x\sin x\,dx$$

En posant $u(x) = x$ et $v'(x) = \sin x$ (ce qui implique $u'(x) = 1$ et permet de choisir $v(x) = -\cos x$), une intégration par parties, licite car u et v sont de classe C^1 sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, donne : $\int_{0}^{\pi/2} x\,f(x)dx = \left[-x\cos x\right]_{0}^{\pi/2} + \int_{0}^{\pi/2} \cos x\,dx = \left[\sin x\right]_{0}^{\pi/2} = 1$.

Conclusion :

$$\boxed{X \text{ possède une espérance et } E(X) = 1}$$

b) • De même que pour X, la variable X^2 est positive et dominée par $\frac{\pi^2}{4}$ donc $E\left(X^2\right)$ existe, et comme $x \mapsto x^2 f(x)$ est continue sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, en tant que produit d'une fonction polynomiale et de la fonction sinus, on a : $\int_{0}^{\pi/2} x^2 f(x)dx = \int_{0}^{\pi/2} x^2 \sin x\,dx$.

En posant $u(x) = x^2$ et $v'(x) = \sin x$ (ce qui implique $u'(x) = 2x$ et permet de choisir $v(x) = -\cos x$), une intégration par parties, licite car u et v sont de classe C^1 sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, donne :

$$\int_{0}^{\pi/2} x^2\,f(x)dx = \left[-x^2\cos x\right]_{0}^{\pi/2} + \int_{0}^{\pi/2} 2x\cos x\,dx = \int_{0}^{\pi/2} 2x\cos x\,dx$$

On effectue une nouvelle intégration par parties, toujours avec des fonctions de classe C^1 sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$: ici on pose $u(x)=2x$ et $v'(x)=\cos x$ (ce qui implique $u'(x)=2$ et permet de choisir $v(x)=\sin x$). On obtient :

$\int_0^{\pi/2} x^2 f(x)dx=\left[2x\sin x\right]_0^{\pi/2}-\int_0^{\pi/2}2\sin x\,dx=\pi+\left[2\cos x\right]_0^{\pi/2}=\pi-2$.

On peut conclure que X possède un moment d'ordre 2 qui vaut :

$E(X^2)=\pi-2$

Comme $V(X)=E(X^2)-(E(X))^2$, on trouve enfin : $V(X)=\pi-2-1=\pi-3$.

$$\boxed{X \text{ possède une variance et } V(X)=\pi-3}$$

7) a) Pour tout réel x, on a : $(I_n>x)=\bigcap_{i=1}^{n}(X_i>x)$. Par mutuelle indépendance des variables X_i, on en déduit :

$$P(I_n>x)=\prod_{i=1}^{n}P(X_i>x)$$

Puisque toutes les variables X_i suivent la même loi que X et ont donc F comme fonction de répartition, on obtient :

$$P(I_n>x)=\prod_{i=1}^{n}\left(1-F(x)\right)=\left(1-F(x)\right)^n$$

On a alors :

$$F_n(x)=1-P(I_n>x)=1-\left(1-F(x)\right)^n$$

À l'aide de la question 2), on trouve :

$$\boxed{F_n(x)=\begin{cases}0 \text{ si } x<0\\ 1-(\cos x)^n \text{ si } 0\le x\le \pi/2\\ 1 \text{ si } x>\pi/2\end{cases}}$$

b) • Pour tout réel x inférieur ou égal à 0, on a $F_n(x)=0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}F_n(x)=0$.

• Pour tout réel x élément de $\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$, $\cos x$ appartient à $[0,1[$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(\cos x)^n=0$, et par suite : $\lim\limits_{n\to+\infty}F_n(x)=1$.

• Pour tout réel x élément de $\left]\frac{\pi}{2},+\infty\right[$, $F_n(x)=1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}F_n(x)=1$.

Bilan : la suite de fonctions (F_n) converge vers la fonction F qui vaut 0 quand x appartient à $]-\infty\,,0]$ et qui vaut 1 quand x appartient à $]\,0,\,+\infty\,[$.

La fonction F coïncide, sauf en 0, avec la fonction de répartition d'une variable certaine égale à 0 donc :

$$\boxed{\text{La suite } (I_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge en loi vers une variable certaine égale à 0}}$$

c) L'énoncé admet que I_n est une variable à densité, il n'y a donc qu'à dériver F_n, sauf en 0 et en $\frac{\pi}{2}$, ce qui donne : $F_n'(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ n \sin x (\cos x)^{n-1} \text{ si } 0 < x < \pi/2 \\ 0 \text{ si } x > \pi/2 \end{cases}$.

Comme $\sin 0 = 0$ et $\left(\cos\frac{\pi}{2}\right)^{n-1} = 0$ (car $n-1 \geq 1$), on obtient une densité f_n de I_n en posant par exemple : $f_n(0) = 0$ et $f_n\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

On a donc :

$$\boxed{f_n(x) = \begin{cases} n \sin x (\cos x)^{n-1} \text{ si } 0 \leq x \leq \pi/2 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}}$$

Comme pour $E\left(X^2\right)$, le moment d'ordre 2 de I_n existe aussi par domination et on a :

$E\left(I_n^2\right) = \int_0^{\pi/2} x^2 f_n(x) dx = \int_0^{\pi/2} x^2 \; n \sin x (\cos x)^{n-1} dx$

En posant $u(x) = x^2$ et $v'(x) = n \sin x (\cos x)^{n-1}$ (ce qui implique $u'(x) = 2x$ et permet de choisir $v(x) = -(\cos x)^n$), une intégration par parties, licite car les fonctions u et v sont de classe C^1 sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, donne :

$$\int_0^{\pi/2} x^2 f_n(x) dx = \left[-x^2 (\cos x)^n\right]_0^{\pi/2} + 2\int_0^{\pi/2} x (\cos x)^n dx$$

Le crochet est nul pour les raisons habituelles donc :

$$\int_0^{\pi/2} x^2 f_n(x) dx = 2\int_0^{\pi/2} x (\cos x)^n dx$$

On peut conclure :

$$\boxed{I_n \text{ possède un moment d'ordre 2 et } E(I_n^2) = 2\int_0^{\pi/2} x(\cos x)^n dx}$$

d) On a : $E(I_n^2) = 2\int_0^{\pi/2} x(\cos x)^n dx$. Dans cette intégrale, on peut majorer x par $\frac{\pi}{2}$, puis multiplier par $(\cos x)^n$ qui est positif. En intégrant bornes dans l'ordre croissant, on obtient :

$$2\int_0^{\pi/2} x(\cos x)^n dx \leq \pi \int_0^{\pi/2} (\cos x)^n dx$$

On a bien :

$$\boxed{E(I_n^2) \leq \pi\, u_n}$$

e) En appliquant l'inégalité de Markov à la variable I_n^2 qui est bien positive et possède une espérance, on trouve : $\forall \varepsilon > 0,\ P\left(I_n^2 \geq \varepsilon^2 \right) \leq \dfrac{E(I_n^2)}{\varepsilon^2}$. La fonction racine carrée étant une bijection croissante de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$, on obtient :

$$P\left(|I_n| \geq |\varepsilon| \right) \leq \frac{E(I_n^2)}{\varepsilon^2}$$

Avec la positivité de ε, on a finalement :

$$\forall \varepsilon > 0,\ P\left(|I_n| \geq \varepsilon \right) \leq \frac{E(I_n^2)}{\varepsilon^2}$$

D'après la question 8d), on obtient : $\forall \varepsilon > 0,\ P(|I_n| \geq \varepsilon) \leq \dfrac{\pi u_n}{\varepsilon^2}$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, on en déduit par encadrement (une probabilité est positive) :

$$\lim_{n\to+\infty} P(|I_n| \geq \varepsilon) = 0$$

Ceci montre bien que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers la variable aléatoire certaine égale à 0.

8) a) La fonction *h* est dérivable sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ et on a : $\forall x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right],\ h'(x) = -\sin x$. Comme h' est négative (en ne s'annulant qu'en 0), la fonction *h* est strictement décroissante sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ et comme elle est continue, elle réalise une bijection de $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ sur $[0,1]$.

b) La variable aléatoire *X* est à valeurs dans $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ donc on peut composer par *h*, ce qui prouve que *Y* est bien définie.
On a de plus $Y(\Omega) = [0,1]$, ce qui donne déjà :

$$G(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ 1 \text{ si } x > 1 \end{cases}$$

$\forall x \in [0,1],\ G(x) = P(Y \leq x) = P(h(X) \leq x) = P\left(X \geq h^{-1}(x)\right) = 1 - \left(F \circ h^{-1}\right)(x)$.
On a donc :
$\forall x \in [0,1],\ G(x) = 1 - F\left(h^{-1}(x)\right) = 1 - \left(1 - \cos\left(h^{-1}(x)\right)\right) = \cos\left(h^{-1}(x)\right)$.
Comme $h^{-1}(x)$ appartient à $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, on en déduit : $G(x) = h\left(h^{-1}(x)\right) = x$.

Pour résumer, on obtient :

$$G(x)=\begin{cases} 0 \text{ si } x<0 \\ x \text{ si } 0\leq x\leq 1 \\ 0 \text{ si } x>1 \end{cases}$$

Conclusion :

$$\boxed{Y \text{ suit la loi } \mathcal{U}([0,1])}$$

CONCOURS PREMASTER EDHEC

RAPPORT DE CORRECTION 2021

Epreuve de MATHEMATIQUES

Présentation de l'épreuve.
L'épreuve, longue comme d'habitude, comportait trois exercices, ce qui permettait de juger les candidats sur la presque totalité du programme de l'épreuve : algèbre linéaire, analyse et probabilités. Les correcteurs ont trouvé le sujet adapté et très sélectif tout en respectant scrupuleusement le programme.

• L'exercice 1, portant sur le programme d'algèbre linéaire, proposait l'étude des endomorphismes nilpotents de $\mathbb{R}^2$ et démontrait l'équivalence : f nilpotent $\Leftrightarrow \operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Im}(f)$.
Dans une dernière question, on établissait l'impossibilité d'écrire un endomorphisme nilpotent non nul de $\mathbb{R}^2$ comme étant composé de deux endomorphismes nilpotents de $\mathbb{R}^2$.

• L'exercice 2, portant sur le programme de probabilités discrètes, étudiait des tirages sans remise de boules dans une urne contenant n boules noires et b boules blanches, l'objectif étant de déterminer la loi de la variable aléatoire Z égale au nombre de boules tirées lorsque l'on obtient la dernière boule noire. La fin consistait à déterminer l'espérance de Z ainsi que celle de la variable X égale au nombre de boules blanches restant dans l'urne quand pour la première fois l'urne ne contient plus aucune boule noire.

• L'exercice 3, portant sur les programmes de probabilités et d'analyse, proposait, dans la première partie, l'étude des intégrales de Wallis, puis dans la deuxième partie, l'étude d'une variable aléatoire X de densité la fonction f définie par : $f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{si } \ 0 \le x \le \pi/2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.
La fin établissait la convergence en probabilité de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, où la variable aléatoire I_n est définie par $I_n = \min(X_1, X_2, \dots, X_n)$, où $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes et qui suivent toutes la même loi que X.

Statistiques.
Pour les 352 candidats ayant composé :

• La moyenne obtenue à cette épreuve est de 10,61 sur 20, très légèrement inférieure à celle de l'année dernière (moins 0,38 point).

• L'écart-type d'environ 5 (1,4 point au-dessus de l'année dernière).

• La médiane est, quant à elle, égale à 10,3 (0,7 point au-dessous de celle de l'année dernière).

• 9,7 % des candidats obtiennent une note inférieure ou égale à 4, le pourcentage était de 4,3 l'année dernière.

• 28,2 % des candidats ont entre 8 et 12 (3 points de moins que l'année dernière)

• 10,5 % des candidats obtiennent une note supérieure ou égale à 18 (3,4 points de plus que l'année dernière).

Analyse des copies.
Les correcteurs constatent une nette détérioration de la présentation des copies, ce qui ne pousse pas à l'indulgence. D'un point de vue académique, ils notent que le niveau est encore plus hétérogène que l'année dernière. Certains candidats semblent mal préparés à cette épreuve, certains ignorant même le programme officiel de mathématiques du concours Prémaster de l'EDHEC (rappelons que les notions de déterminant, polynôme caractéristique, polynôme minimal, trigonalisation, propriétés des

endomorphismes nilpotents, ne sont pas au programme : les réponses utilisant ces notions n'ont pas été validées).
Mis à part, d'un côté, quelques très brillants candidats ayant des connaissances bien en phase avec celles exigées par le programme, et de l'autre, un certain nombre de candidats très mal préparés ayant des notes extrêmement basses (ces candidats connaissent souvent très mal les objets mathématiques, donc ils ne les maîtrisent pas du tout). Cela dit, les correcteurs trouvent l'ensemble d'un niveau honorable (ceci, grâce aux très bons candidats), tout en regrettant que de très nombreux candidats, certainement par manque de temps pour préparer cette épreuve, aient fait l'impasse sur les probabilités.

Commentaires par exercice.

Exercice 1

- Avoir montré que k est supérieur ou égal à 2 n'autorise pas à poser $k = 2$ dans la suite…
- Quelques candidats pensent que $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont supplémentaires, alors que dans cet exercice ils étaient égaux !
- Un très grand nombre de candidats ont du mal à établir rigoureusement une inclusion : leurs copies sont très peu crédibles sur ce point.

Exercice 2

- De nombreux candidats oublient de réfléchir et "balancent" des lois ou des probabilités au petit bonheur la chance !
- La formule des probabilités composées donnant la probabilité d'une intersection a été très peu correctement formalisée, les candidats donnant trop vite le résultat, sans vraiment argumenter.
- Par ailleurs, faire le pari de l'indépendance des événements « on a obtenu $(n-1)$ boules noires en $(n+k-1)$ tirages » et « on obtient une boule noire au $(n+k)$-ième tirage », est plus qu'extrêmement douteux (rappelons que les tirages ont lieu sans remise).

Exercice 3

- Le thème ultra-classique des intégrales de Wallis a rassuré un bon nombre de candidats mais, tout de même, de nombreux autres ont écrit n'importe quoi (intégrale d'un produit égal au produit des intégrales, par exemple).
- Rappelons que le contraire de « la suite u est strictement croissante » n'est pas « la suite u est décroissante (strictement ou pas d'ailleurs) ».
- Une itération bancale avec escroquerie ne remplace jamais une récurrence !
- Les conditions d'intégration d'une inégalité ne sont presque jamais énoncées.
- Le théorème de stricte positivité de l'intégrale est ignoré par la quasi-totalité des candidats.
- Les fonctions de répartition trouvées dans cet exercice sont presque toujours fausses, et pire, incohérentes (par exemple, elles ne tendent pas vers 1 en $+\infty$).
- Signalons quelques fautes de calcul, notamment celle-ci : $\int_0^{\pi/2} -\sin t\,dt = [\cos t]_0^{\pi/2} = 1$. La première égalité est correcte, mais pas la deuxième… Pour finir, quelques candidats, heureusement pas trop nombreux, pensent, ou font semblant de penser, que $\int_0^{\pi/2} (\cos t)^n\,dt = \left[\frac{(\sin t)^{n+1}}{n+1}\right]_0^{\pi/2}$, ce qui rendait le problème inepte !

Conclusion.

L'épreuve a permis de repérer et de mettre en valeur les candidats les mieux préparés (il y en a de très bons) et les plus aptes à trouver leur place dans des études exigeantes qui nécessitent rigueur et honnêteté intellectuelle.
Nous conseillons, comme par le passé, aux futurs candidats de se préparer d'une façon complète, en essayant de ne négliger aucun point du programme : les trois "compartiments" de ce programme (analyse, algèbre linéaire et probabilités) sont essentiels pour une bonne continuation des études à l'EDHEC.