BCE
BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

Conception : EDHEC

OPTION ECONOMIQUE

MATHÉMATIQUES

8 mai 2018, de 8 h. à 12 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Ils ne doivent faire usage d'aucun document. ***L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.*** *Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice 1

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$.

1) Vérifier que A n'est pas inversible.

2) Déterminer les valeurs propres de la matrice A, puis trouver les sous-espaces propres associés à ces valeurs propres.

Dans la suite de cet exercice, on considère l'application f qui, à toute matrice M de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, associe :

$$f(M) = AM$$

3) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

4) a) Déterminer une base de $\text{Ker}(f)$ et vérifier que $\text{Ker}(f)$ est de dimension 2.

b) En déduire la dimension de $\text{Im}(f)$.

c) On pose $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et on rappelle que la famille (E_1, E_2, E_3, E_4) est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Écrire $f(E_1)$, $f(E_2)$, $f(E_3)$ et $f(E_4)$ sous forme de combinaisons linéaires de E_1, E_2, E_3 et E_4, puis donner une base de $\text{Im}(f)$.

5) a) Déterminer l'image par f des vecteurs de base de $\operatorname{Im}(f)$.
b) Donner les valeurs propres de f puis conclure que f est diagonalisable.

6) Généralisation : f est toujours l'endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ défini par $f(M) = AM$, mais cette fois, A est une matrice quelconque de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On admet que f et A possèdent des valeurs propres et on se propose de montrer que ce sont les mêmes.
a) Soit λ une valeur propre de A et X un vecteur colonne propre associé.
Justifier que $X\,{}^tX$ appartient à $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, puis montrer que c'est un vecteur propre de f. En déduire que λ est valeur propre de f.
b) Soit λ une valeur propre de f et M une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ vecteur propre de f associé à cette valeur propre. En considérant les colonnes C_1 et C_2 de M, montrer que λ est valeur propre de A.

Exercice 2

On dispose de trois pièces : une pièce numérotée 0, pour laquelle la probabilité d'obtenir "pile" vaut $\frac{1}{2}$ et celle d'obtenir "face" vaut également $\frac{1}{2}$, une pièce numérotée 1, donnant "face" à coup sûr et une troisième pièce, numérotée 2, donnant "pile" à coup sûr.
On choisit l'une de ces pièces au hasard et on la lance indéfiniment.
Pour tout i de $\{0, 1, 2\}$, on note A_i l'événement : « on choisit la pièce numérotée i ».
Pour tout entier naturel k non nul, on note P_k l'événement « On obtient "pile" au lancer numéro k » et on pose $F_k = \overline{P_k}$.
On considère la variable aléatoire X, égale au rang d'apparition du premier "pile" et la variable aléatoire Y, égale au rang d'apparition du premier "face". On convient de donner à X la valeur 0 si l'on n'obtient jamais "pile" et de donner à Y la valeur 0 si l'on n'obtient jamais "face".
1) a) Déterminer $P(X=1)$.
b) Montrer que : $\forall n \geq 2,\ P(X=n) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n$.
c) En déduire la valeur de $P(X=0)$.

2) Montrer que X admet une espérance et la calculer.

3) Montrer que $X(X-1)$ possède une espérance. En déduire que X possède une variance et vérifier que $V(X) = \frac{4}{3}$.

4) Justifier que Y suit la même loi que X.

5) a) Montrer que, pour tout entier j supérieur ou égal à 2, $P([X=1] \cap [Y=j]) = P(Y=j)$.
b) Montrer que, pour tout entier i supérieur ou égal à 2, $P([X=i] \cap [Y=1]) = P(X=i)$.

6) Loi de $X+Y$.
a) Expliquer pourquoi $X+Y$ prend toutes les valeurs entières positives sauf 0 et 2.
b) Montrer que $P(X+Y=1) = \frac{2}{3}$.

c) Justifier que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, on a :

$$(X+Y=n)=([X=1]\cap[Y=n-1])\cup([Y=1]\cap[X=n-1])$$

d) En déduire que l'on a, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3 :

$$P(X+Y=n)=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

7) Informatique.

On rappelle que, pour tout entier naturel m, l'instruction `grand(1,1,'uin',0,m)` renvoie un entier aléatoire compris entre 0 et m (ceci de façon équiprobable).

On décide de coder "pile" par 1 et "face" par 0.

a) Compléter le script `Scilab` suivant pour qu'il permette le calcul et l'affichage de la valeur prise par la variable aléatoire X lors de l'expérience réalisée dans cet exercice.

```
piece=grand(1,1,'uin',---,---)
x=1
if piece==0
then lancer=grand(1,1,'uin',---,---)
       while lancer==0
       lancer=---
       x=---
       end
else
    if piece==1  then x=---
    end
end
disp(x)
```

b) Justifier que le cas où l'on joue avec la pièce numérotée 2 ne soit pas pris en compte dans le script précédent.

Exercice 3

On admet que toutes les variables aléatoires considérées dans cet exercice sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},P)$ que l'on ne cherchera pas à déterminer.

Soit a un réel strictement positif et f la fonction définie par : $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{a}e^{-x^2/2a} \text{ si } x\geq 0\\ 0 \text{ si } x<0\end{cases}$.

1) Montrer que la fonction f est une densité.

Dans la suite de l'exercice, on considère une variable aléatoire X de densité f.

2) Déterminer la fonction de répartition F_X de X.

3) On considère la variable aléatoire Y définie par : $Y=\dfrac{X^2}{2a}$.

a) Montrer que Y suit la loi exponentielle de paramètre 1.

b) On rappelle qu'en `Scilab`, la commande `grand(1,1,'exp',1/lambda)` simule une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ. Écrire un script `Scilab` demandant la valeur de a à l'utilisateur et permettant de simuler la variable aléatoire X.

4) a) Vérifier que la fonction g, qui à tout réel x associe $x^2 e^{-x^2/2a}$, est paire.

b) Rappeler l'expression intégrale ainsi que la valeur du moment d'ordre 2 d'une variable aléatoire Z suivant la loi normale de paramètres 0 et a.

c) En déduire que X possède une espérance et la déterminer.

5) a) Rappeler l'espérance de Y puis montrer que X possède un moment d'ordre 2 et le calculer.

b) En déduire que la variance de X est donnée par :

$$V(X) = \frac{(4-\pi)a}{2}$$

On suppose désormais que le paramètre a est inconnu et on souhaite l'estimer.

6) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1. On considère un échantillon $(X_1, X_2, ..., X_n)$ composé de variables aléatoires indépendantes ayant toutes la même loi que X.

On note S_n la variable aléatoire définie par $S_n = \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n} X_k^2$.

a) Montrer que S_n est un estimateur sans biais de a.

b) Montrer que X^2 possède une variance et que $V(X^2) = 4a^2$.

c) Déterminer le risque quadratique $r_a(S_n)$ de S_n en tant qu'estimateur de a. En déduire que S_n est un estimateur convergent de a.

7) On suppose que a est inférieur ou égal à 1.

a) Écrire l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev pour la variable aléatoire S_n et en déduire :

$$\forall \varepsilon > 0,\ P(|S_n - a| \le \varepsilon) \ge 1 - \frac{1}{n\varepsilon^2}$$

b) Déterminer une valeur de n pour laquelle $\left[S_n - \frac{1}{10}, S_n + \frac{1}{10}\right]$ est un intervalle de confiance pour a avec un niveau de confiance au moins égal à 95%.

Problème

On considère la fonction f qui à tout réel x associe : $f(x) = \int_0^x \ln(1+t^2)\,dt$.

Les deux parties de ce problème peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.

Partie 1 : étude de f

1) a) Déterminer le signe de $f(x)$ selon le signe de x.

b) Justifier que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$ pour tout réel x.

c) En déduire les variations de f sur $\mathbb{R}$ (on ne cherchera pas à calculer les limites de f).

2) a) Montrer que f est impaire.

b) Étudier la convexité de la fonction f et donner les coordonnées des éventuels points d'inflexion de la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

3) a) Déterminer les réels a et b tels que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \ \frac{t^2}{1+t^2} = a + \frac{b}{1+t^2}$$

b) En déduire, grâce à une intégration par parties, que, pour tout réel x, on a :

$$f(x) = x\left(\ln\left(1+x^2\right)-2\right)+2\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt$$

4) Recherche d'un équivalent de $f(x)$ au voisinage de $+\infty$.

a) Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}dt$ est une intégrale convergente.

b) En déduire que $f(x) \underset{+\infty}{\sim} x\ln\left(1+x^2\right)$.

c) Vérifier que, pour tout réel x strictement positif, on a $\ln\left(1+x^2\right) = 2\ln x + \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$, puis établir l'équivalent suivant :

$$f(x) \underset{+\infty}{\sim} 2x\ln x$$

d) Donner sans calcul un équivalent de $f(x)$ lorsque x est au voisinage de $-\infty$.

5) Recherche d'un équivalent de $f(x)$ au voisinage de 0.

a) Montrer que f est de classe C^3 sur $\mathbb{R}$.

On admet la formule de Taylor-Young à l'ordre 3 au voisinage de 0 pour la fonction f, c'est-à-dire :

$$f(x) \underset{0}{=} f(0) + \frac{x^1}{1!}f'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \frac{x^3}{3!}f^{(3)}(0) + o\left(x^3\right)$$

b) Déterminer $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$ et $f^{(3)}(0)$.

c) En déduire alors un équivalent de $f(x)$ au voisinage de 0. (on trouve $f(x) \underset{0}{\sim} \frac{x^3}{3}$)

6) On rappelle qu'en `Scilab`, la commande `grand(1,1,'unf',a,b)` simule une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[a,b]$. Compléter le script `Scilab` suivant pour qu'il calcule et affiche, à l'aide de la méthode de Monte-Carlo, une valeur approchée de $f(1)$:

```
U=grand(1,100 000,'unf',0,1)
V=log(1+U.^2)
f=------
disp(f)
```

Partie 2 : étude d'une suite

On pose $u_0 = 1$, et pour tout entier naturel n non nul : $u_n = \int_0^1 \left(\ln\left(1+t^2\right)\right)^n dt$.

7) a) La valeur donnée à u_0 est-elle cohérente avec l'expression générale de u_n ?

b) Exprimer u_1 à l'aide de la fonction f.

8) a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 0. En déduire qu'elle converge.

9) a) Établir l'encadrement suivant :

$$0 \le u_n \le (\ln 2)^n$$

b) Que peut-on en déduire sur la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$? Sur la série de terme général u_n ?

10) a) Montrer que :

$$0 \le \int_0^1 \frac{\left(\ln\left(1+t^2\right)\right)^n}{1-\ln\left(1+t^2\right)}\,dt \le \frac{u_n}{1-\ln 2}$$

b) En déduire la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{\left(\ln\left(1+t^2\right)\right)^n}{1-\ln\left(1+t^2\right)}\,dt$.

c) Justifier que, pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$\sum_{k=0}^{n-1} u_k = \int_0^1 \frac{1-\left(\ln\left(1+t^2\right)\right)^n}{1-\ln\left(1+t^2\right)}\,dt$$

d) En déduire que l'on a :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \int_0^1 \frac{1}{1-\ln\left(1+t^2\right)}\,dt$$

e) Modifier le script présenté à la question 6) pour donner une valeur approchée de $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_k$.

Corrigé 2018

Exercice 1

1) On sait que $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ n'est pas inversible si et seulement si $ad-bc=0$.

Ici, on a $ad-bc=1\times 6-2\times 3=0$ donc :

$$\boxed{A \text{ n'est pas inversible}}$$

2) On a $A-\lambda I=\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 6-\lambda \end{pmatrix}$.

Les valeurs propres de A sont les réels λ pour lesquels $A-\lambda I$ n'est pas inversible, c'est-à-dire pour lesquels : $(1-\lambda)(6-\lambda)-2\times 3=0$.

Les valeurs propres de la matrice A sont donc les solutions de : $\lambda^2-7\lambda=0$.

On a donc $\lambda(\lambda-7)=0$, ce qui permet de conclure :

$$\boxed{\text{Les valeurs propres de } A \text{ sont } 0 \text{ et } 7}$$

On trouve le sous-espace propre associé à la valeur propre 0 en résolvant $AX=0X$, avec $X=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, ce qui donne $\begin{cases} x+2y=0 \\ 3x+6y=0 \end{cases}$ et se réduit à : $x+2y=0$.

On a donc $X=\begin{pmatrix} -2y \\ y \end{pmatrix}=y\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et ainsi :

$$\boxed{\text{Le sous-espace propre de } A \text{ associé à la valeur propre 0 est } \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}$$

On trouve le sous-espace propre associé à la valeur propre 7 en résolvant : $AX=7X$, avec $X=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, ce qui donne $\begin{cases} x+2y=7x \\ 3x+6y=7y \end{cases}$, ou encore $\begin{cases} -6x+2y=0 \\ 3x-y=0 \end{cases}$

La première équation est la même que la deuxième donc il reste : $3x-y=0$.

On a donc $X=\begin{pmatrix} x \\ 3x \end{pmatrix}=x\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et ainsi :

$$\boxed{\text{Le sous-espace propre de } A \text{ associé à la valeur propre 7 est } \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right)}$$

3) • Pour toute matrice M de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on a $f(M)=AM$, et comme $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est stable pour le produit matriciel, on est certain que $f(M)\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

• Si on se donne deux matrices M et N de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et un réel λ, on a, grâce aux propriétés du produit matriciel :

$$f(M+\lambda N) = A(M+\lambda N) = AM + \lambda AN = f(M) + \lambda f(N)$$

Les deux points précédents prouvent que :

$$\boxed{f \text{ est un endomorphisme de } \mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$$

4) a) Soit M une matrice de $\operatorname{Ker}(f)$. On a donc $AM = 0$ et en notant $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, ceci s'écrit : $\begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ 3a+6c & 3b+6d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Il reste : $\begin{cases} a+2c=0 \\ b+2d=0 \end{cases}$, c'est-à-dire : $\begin{cases} a=-2c \\ b=-2d \end{cases}$. On a donc :

$$M = \begin{pmatrix} -2c & -2d \\ c & d \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On en déduit : $\operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$. Comme les matrices $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ne sont pas proportionnelles, la famille $\left(\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$ est une base de $\operatorname{Ker}(f)$ et ainsi :

$$\boxed{\operatorname{Ker}(f) \text{ est de dimension } 2}$$

b) Comme f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et comme $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est de dimension 4, le théorème du rang s'écrit : $\dim \operatorname{Ker}(f) + \dim \operatorname{Im}(f) = 4$.

On en déduit :

$$\boxed{\dim \operatorname{Im}(f) = 2}$$

c) $f(E_1) = AE_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$.

$f(E_2) = AE_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

$f(E_3) = AE_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$.

$f(E_4) = AE_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$.

On a donc : $f(E_1) = E_1 + 3E_3$.

$f(E_2) = E_2 + 3E_4$.

$f(E_3) = 2E_1 + 6E_3$.

$f(E_4) = 2E_2 + 6E_4$.

On sait que $\mathrm{Im}(f)=\mathrm{Vect}\left(f(E_1),f(E_2),f(E_3),f(E_4)\right)$ mais $f(E_3)=2f(E_1)$ et $f(E_4)=2f(E_2)$ donc :

$$\mathrm{Im}(f)=\mathrm{Vect}\left(f(E_1),f(E_2)\right)=\mathrm{Vect}\left(E_1+3E_3,E_2+3E_4\right)$$

On a une famille génératrice de $\mathrm{Im}(f)$, qui est constituée de 2 vecteurs donc, comme $\mathrm{Im}(f)$ est de dimension 2, cette famille est une base de $\mathrm{Im}(f)$.
Conclusion :

$$\boxed{\left(E_1+3E_3,E_2+3E_4\right)\text{ est une base de }\mathrm{Im}(f)}$$

5) a) On a, par linéarité de *f* et grâce à $f(E_3)=2f(E_1)$ et $f(E_4)=2f(E_2)$:

$f(E_1+3E_3)=f(E_1)+3f(E_3)=f(E_1)+6f(E_1)=7f(E_1)=7(E_1+3E_3)$.

$f(E_2+3E_4)=f(E_2)+3f(E_4)=f(E_2)+6f(E_2)=7f(E_2)=7(E_2+3E_4)$.

b) Comme les matrices E_1+3E_3 et E_2+3E_4 ne sont pas nulles, ceci montre que E_1+3E_3 et E_2+3E_4 sont vecteurs propres de *f* associés à la valeur propre 7 et ainsi, le sous-espace propre de *f* associé à la valeur propre 7 est au moins de dimension 2 puisque $\left(E_1+3E_3,E_2+3E_4\right)$ est une famille libre.

Par ailleurs, le sous-espace propre de *f* associé à la valeur propre 0 est $\mathrm{Ker}(f)$ qui est de dimension 2, et comme la somme des dimensions des sous-espaces propres ne peut pas excéder la dimension de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui est égale à 4, alors le sous-espace propre de *f* associé à la valeur propre 7 est de dimension exactement 2.
On peut donc conclure que *f* a deux valeurs propres, 0 et 7, et que la somme des dimensions de ses sous-espaces propres est égale à la dimension de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, d'où l'on déduit :

$$\boxed{f\text{ est diagonalisable}}$$

6) a) Comme $X\in\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ alors ${}^tX\in\mathcal{M}_{1,2}(\mathbb{R})$, et ainsi le produit $X\,{}^tX$ est élément de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Soit λ une valeur propre de *A* et *X* un vecteur colonne propre non nul associé. On a $AX=\lambda X$, et en multipliant par ${}^tX$, on obtient $AX\,{}^tX=\lambda X\,{}^tX$, c'est-à-dire :

$$f(X\,{}^tX)=\lambda X\,{}^tX$$

Montrons que $X\,{}^tX$ n'est pas nul afin de pouvoir conclure que $X\,{}^tX$ est vecteur propre de *f* associé à la valeur propre λ.

Avec $X=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, on a $X\,{}^tX=\begin{pmatrix}x^2&xy\\xy&y^2\end{pmatrix}$. Si $X\,{}^tX$ était nul, on aurait, entre autres, $x^2=y^2=0$, soit $x=y=0$ ce qui donnerait : $X=0$. Ceci contredit l'hypothèse faite sur *X*. Ainsi, $X\,{}^tX$ est vecteur propre de *f* associé à la valeur propre λ, ce qui prouve que :

$$\boxed{\lambda\text{ est valeur propre de }f}$$

b) Soit λ une valeur propre de f et soit M une matrice non nulle de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, vecteur propre de f associé à la valeur propre λ.
On a, par définition, $f(M) = \lambda M$, ce qui se traduit par : $AM = \lambda M$.

En notant C_1 et C_2 les colonnes de M, on obtient : $\begin{cases} AC_1 = \lambda C_1 \\ AC_2 = \lambda C_2 \end{cases}$ (*)

Comme M n'est pas la matrice nulle, au moins une des colonnes C_1 ou C_2 n'est pas nulle et est donc vecteur propre de A pour la valeur propre λ, ceci grâce à (*).
Conclusion :

$$\boxed{\lambda \text{ est valeur propre de } A}$$

Exercice 2 ....

1) a) La formule des probabilités totales, associée au système complet d'événements (A_0, A_1, A_2) s'écrit :
$P(X=1) = P(A_0)\, P_{A_0}(X=1) + P(A_1)\, P_{A_1}(X=1) + P(A_2)\, P_{A_2}(X=1)$

On a, bien sûr, $P_{A_0}(X=1) = \frac{1}{2}$, $P_{A_1}(X=1) = 0$ et $P_{A_2}(X=1) = 1$.

En remplaçant, on obtient : $P(X=1) = \frac{1}{2}P(A_0) + P(A_2)$.

Comme $P(A_0) = P(A_1) = P(A_2) = \frac{1}{3}$, on obtient : $P(X=1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$.

Finalement :

$$\boxed{P(X=1) = \frac{1}{2}}$$

b) Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on a, de la même façon :
$P(X=n) = P_{A_0}(X=n)P(A_0) + P_{A_1}(X=n)P(A_1) + P_{A_2}(X=n)P(A_2)$.

On a $P_{A_0}(X=n) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$: c'est le rang d'apparition du premier "pile" lors de lancers indépendants d'une pièce donnant "pile" avec la probabilité $\frac{1}{2}$ et donnant "face" avec la probabilité $\frac{1}{2}$, ce qui prouve que la loi de X, conditionnellement à A_0, est la loi géométrique de paramètre $\frac{1}{2}$.

De plus, $P_{A_1}(X=n) = 0$ car la pièce numérotée 1 n'a pas de "pile" et $P_{A_2}(X=n) = 0$ car la pièce numérotée 2 a 2 "piles", donc le premier "pile" ne peut survenir qu'au premier lancer (ici, on a $n \geq 2$).

En remplaçant :

$$\boxed{\forall n \geq 2,\ P(X=n) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

Remarque. On pouvait très bien expliquer que, comme n est supérieur ou égal à 2, la seule façon de réaliser $(X=n)$ est de choisir la pièce numérotée 0 (une chance sur trois) puis de faire $n-1$ faces suivis d'un pile (probabilité égale à $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ par indépendance).

c) D'après l'énoncé, X est une variable aléatoire donc $\sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n) = 1$.

On en déduit que $P(X=0) + P(X=1) + \sum_{n=2}^{+\infty} P(X=n) = 1$.

Or $\sum_{n=2}^{+\infty} P(X=n) = \frac{1}{3}\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{3}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}} - 1 - \frac{1}{2}\right)$, d'où :

$$\sum_{n=2}^{+\infty} P(X=n) = \frac{1}{3}\left(2-1-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{6}$$

Dès lors, on obtient : $P(X=0) + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = 1$ et on peut conclure :

$$\boxed{P(X=0) = \frac{1}{3}}$$

2) Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on a :

$$n\,P(X=n) = n\,\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{6} \times n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

Ceci montre que la série de terme général $n\,P(X=n)$ est absolument convergente (car proportionnelle à la série géométrique "dérivée" de raison $\frac{1}{2}$, comprise strictement entre –1 et 1).

Par conséquent :

$$\boxed{X \text{ possède une espérance}}$$

On a alors :

$E(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} n\,P(X=n) = P(X=1) + \sum_{n=2}^{+\infty} n\,P(X=n) = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\sum_{n=2}^{+\infty} n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

$E(X) = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - 1\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{(1-\frac{1}{2})^2} - 1\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$.

Finalement :

$$\boxed{E(X)=1}$$

3) On a : $n(n-1)P(X=n) = n(n-1)\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n = \dfrac{1}{12}\times n(n-1)\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-2}$.

La série de terme général $n(n-1)\ P(X=n)$ est absolument convergente (car proportionnelle à la série géométrique “dérivée seconde” dont la raison $\dfrac{1}{2}$ est comprise strictement entre -1 et 1).

Par conséquent, $X(X-1)$ possède une espérance et on obtient successivement :

$E\big(X(X-1)\big) = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)P(X=n) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)P(X=n)$.

$E\big(X(X-1)\big) = \dfrac{1}{12}\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-2}$ (calcul fait en début de question).

$E\big(X(X-1)\big) = \dfrac{1}{12}\times\dfrac{2}{\left(1-\dfrac{1}{2}\right)^3} = = \dfrac{1}{12}\times 16 = \dfrac{4}{3}$.

Comme $X^2 = X(X-1)+X$ et comme X et $X(X-1)$ ont une espérance, on en déduit, par linéarité de l'espérance, que X a un moment d'ordre 2 qui est donné par : $E\left(X^2\right) = E\big(X(X-1)\big)+E(X) = \dfrac{4}{3}+1 = \dfrac{7}{3}$.

Pour finir, on a : $V(X) = E\left(X^2\right)-\left(E(X)\right)^2 = \dfrac{7}{3}-1$.

Soit :

$$\boxed{V(X)=\frac{4}{3}}$$

4) Si l'on échange les mots "pile" et "face" dans la phrase décrivant les trois pièces avec lesquelles on joue, on constate que la description est la même : il y a encore une pièce équilibrée P_0, une pièce P_1 comportant deux "piles" et une troisième pièce P_2 comportant deux "faces" : les pièces P_1 et P_2 sont échangées mais les calculs sont les mêmes qu'aux questions 1a), 1b) et 1c) et ils montrent que le rang du premier "face" suit la même loi que le rang du premier "pile".

Conclusion :

$$\boxed{X \text{ et } Y \text{ suivent la même loi}}$$

5) a) Si $(Y=j)$ est réalisé, avec $j \geq 2$, alors le premier "face" n'est pas arrivé au premier lancer, c'est donc que le premier lancer a donné "pile", ce qui signifie que $(X=1)$ est réalisé.

On a donc $(Y=j)\subset(X=1)$, de quoi l'on déduit : $(Y=j)\cap(X=1) = (Y=j)$.

On a alors :

$$\boxed{\forall j \geq 2,\ P([X=1]\cap[Y=j]) = P(Y=j)}$$

b) De la même façon, si ($X = i$) est réalisé, avec $i \geq 2$, alors le premier "pile" n'est pas arrivé au premier lancer, c'est donc que le premier lancer a donné "face", c'est-à-dire que ($Y = 1$) est réalisé.
On a donc $(X = i) \subset (Y = 1)$, de quoi l'on déduit : $(X = i) \cap (Y = 1) = (X = i)$.
On obtient alors :

$$\boxed{\forall i \geq 2\,,\ P([X = i] \cap [Y = 1]) = P(X = i)}$$

6) a) Comme la pièce choisie va bien donner "pile" ou "face" au premier lancer, les deux variables X ou Y ne peuvent pas prendre toutes les deux la valeur 0 donc $X + Y$ non plus.
Pour que $X + Y$ prenne la valeur 2, il faudrait :

- Soit que X prenne la valeur 0 et Y la valeur 2, ce qui n'est pas possible, puisque si X prend la valeur 0, c'est que l'on n'a pas obtenu de "pile" et dès lors Y prend certainement la valeur 1 (le premier "face" survient au premier lancer).
- Soit que X prenne la valeur 2 et Y la valeur 0, ce qui n'est pas possible pour les mêmes raisons que ci-dessus.
- Soit que X prenne la valeur 1 et Y la valeur 1, ce qui n'est pas possible, puisqu'on ne peut pas avoir le premier "pile" et le premier "face" tous les deux au premier lancer (avec une seule pièce).

Sinon, $X + Y$ peut prendre la valeur 1 (il suffit de lancer l'une des deux pièces numérotées 1 ou 2) et $X + Y$ peut prendre n'importe quelle valeur n supérieure ou égale à 3, il suffit de lancer la pièce numérotée 0 et de faire, par exemple $n - 1$ fois "pile" puis "face".
Conclusion :

$$\boxed{X + Y \text{ prend toutes les valeurs entières positives sauf 0 et 2}}$$

b) On a $(X + Y = 1) = ([X = 1] \cap [Y = 0]) \cup ([X = 0] \cap [Y = 1])$.
Si $(Y = 0)$ est réalisé, alors on n'obtient aucun "face", donc on a un "pile" au premier lancer et ainsi l'événement $(Y = 0)$ est inclus dans l'événement $(X = 1)$.
On a donc $([X = 1] \cap [Y = 0]) = (Y = 0)$. Par conséquent :

$$P([X = 1] \cap [Y = 0]) = P(Y = 0) = \frac{1}{3}$$

De même, l'événement $(X = 0)$ est inclus dans l'événement $(Y = 1)$ donc :

$$([X = 0] \cap [Y = 1]) = (X = 0)$$

Par conséquent : $P([X = 0] \cap [Y = 1]) = P(X = 0) = \dfrac{1}{3}$.

Par incompatibilité, on obtient :

$$\boxed{P(X + Y = 1) = \frac{2}{3}}$$

c) Quelle que soit la pièce choisie, il est certain que l'une des deux variables X ou Y (et une seule) prendra la valeur 1 (en effet, soit le premier lancer donne "pile" et $(X=1)$ est réalisé, soit le premier lancer donne "face" et $(Y=1)$ est réalisé.

Par conséquent, pour n supérieur ou égal à 3, on a :

$$(X+Y=n)=\left([X=1]\cap[Y=n-1]\right)\cup\left([Y=1]\cap[X=n-1]\right)$$

d) Par incompatibilité, on trouve :

$$P(X+Y=n)=P\left([X=1]\cap[Y=n-1]\right)+P\left([Y=1]\cap[X=n-1]\right)$$

Comme $n-1\geq 2$, on peut appliquer les questions 5a) et 5b), ce qui donne :

$$P(X+Y=n)=P(Y=n-1)+P(X=n-1)$$

On a vu que X et Y suivent la même loi donc : $P(X+Y=n)=2P(X=n-1)$.

En remplaçant, d'après la question 1b), on trouve :

$$\boxed{P(X+Y=n)=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}$$

7) a) L'instruction `piece=grand(1,1,'uin',0,2)` renvoie au hasard 0, 1 ou 2, et permet de simuler le choix de la pièce.

L'égalité `piece==0` signifie que l'on joue avec la pièce équilibrée.

L'instruction `lancer=grand(1,1,'uin',0,1)` renvoie au hasard 0 ou 1, et permet de simuler le lancer de la pièce. Il suffit maintenant d'incrémenter la valeur de x jusqu'à ce que l'on obtienne un "pile", c'est-à-dire jusqu'à ce que l'on ait `lancer==1`.

L'égalité `piece==1` signifie que l'on joue avec la pièce donnant "face" à coup sûr donc X prendra la valeur 0.

On peut alors compléter le script de la façon suivante :

```
piece=grand(1,1,'uin',0,2)
x=1
if piece==0
then
   lancer=grand(1,1,'uin',0,1)
   while lancer==0
   lancer=grand(1,1,'uin',0,1)
   x=x+1
   end
else
   if piece==1 then x=0
   end
end
disp(x)
```

b) Si l'on joue avec la pièce 2, il est certain que X prend la valeur 1 mais comme la variable informatique `x` a été initialisée à 1, il n'y a rien à ajouter.

Exercice 3 ....

1) • La restriction de f à l'intervalle $]-\infty, 0[$ est nulle.

Sur $\mathbb{R}_+$, $f(x)$ est un produit de réels positifs puisque $a > 0$, $x \geq 0$ et $e^{-x^2/2a} > 0$.
Par conséquent, f est positive sur $\mathbb{R}$.

• La restriction de f à l'intervalle $]-\infty, 0[$, est nulle, elle est donc continue sur cet intervalle.
De plus, la restriction de f à $\mathbb{R}_+$ est la composée, puis le produit de fonctions continues sur $\mathbb{R}_+$, elle est donc continue sur $\mathbb{R}_+$.
Par conséquent, f est continue sur $\mathbb{R}$, sauf peut-être en 0.

• Pour finir, $\int_{-\infty}^{0} f(t)dt = 0$ et, pour tout x positif, on a :

$$\int_0^x f(t)dt = \int_0^x \frac{t}{a} e^{-t^2/2a}\, dt = \left[-e^{-t^2/2a}\right]_0^x = -e^{-x^2/2a} + 1$$

Comme $a > 0$, on a $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - e^{-x^2/2a}\right) = 1 - 0 = 1$, ce qui, par définition de la convergence d'une intégrale impropre, signifie que $\int_0^{+\infty} f(t)\, dt$ converge et vaut 1.

On a donc : $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, dt = 1$.

Les trois points précédents prouvent que :

$$\boxed{f \text{ est une densité}}$$

2) Comme f est nulle sur $\mathbb{R}_-^*$, on a : $\forall x < 0$, $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{x} 0 dt = 0$.

Pour tout réel x positif ou nul, on a, d'après le calcul fait à la première question :

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{0} 0dt + \int_0^x f(t)dt = 0 + 1 - e^{-x^2/2a}$$

Bilan :

$$\boxed{F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x^2/2a} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 \text{ si } x < 0 \end{cases}}$$

3) a) • On a $Y = \dfrac{X^2}{2a}$, X prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+$ et $a > 0$ donc :

$$\boxed{Y(\Omega) = \mathbb{R}_+}$$

Dès lors, on obtient : $\forall x < 0$, $F_Y(x) = 0$.

- De plus, pour tout réel x positif, on a (car $a > 0$) :

$$F_Y(x) = P(Y \le x) = P\left(\frac{X^2}{2a} \le x\right) = P(X^2 \le 2ax) = P\left(-\sqrt{2ax} \le X \le \sqrt{2ax}\right)$$

On a donc : $\forall x \ge 0$, $F_Y(x) = F_X\left(\sqrt{2ax}\right) - F_X\left(-\sqrt{2ax}\right)$.

X prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+$ et $-\sqrt{2ax} \le 0$ donc $F_X\left(-\sqrt{2ax}\right) = 0$, et ainsi :

$\forall x \ge 0$, $F_Y(x) = F_X\left(\sqrt{2ax}\right) = 1 - e^{-\left(\sqrt{2ax}\right)^2/2a} = 1 - e^{-2ax/2a} = 1 - e^{-x}$.

Grâce aux deux points précédents, on voit que :

$$\boxed{Y \text{ suit la loi exponentielle de paramètre } 1}$$

b) On a $Y = \dfrac{X^2}{2a}$ et X prend des valeurs positives donc $X = \sqrt{2aY}$, et comme une simulation `Scilab` de la variable aléatoire Y est `grand(1,1,'exp',1)`, on en déduit les lignes suivantes :

```
a=input('donnez une valeur pour a :')
Y=grand(1,1,'exp',1)
X=sqrt(2*a*Y)
```

4) a) La fonction g est définie sur $\mathbb{R}$, qui est bien centré en 0, et de plus, on a :

$$g(-x) = (-x)^2 e^{-(-x)^2/2a} = x^2 e^{-x^2/2a} = g(x)$$

Conclusion :

$$\boxed{g \text{ est paire}}$$

b) Si Z suit la loi normale de paramètres 0 et a, on sait que Z possède un moment d'ordre 2 défini par : $E(Z^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{a}\sqrt{2\pi}} x^2 e^{-x^2/2a} dx$. On a donc :

$$\boxed{E(Z^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi a}} x^2 e^{-x^2/2a} dx}$$

De plus, on a : $V(Z) = a$ et $E(Z) = 0$. Par conséquent :

$$\boxed{E(Z^2) = a}$$

c) - On a déjà $\int_{-\infty}^{0} x f(x) dx = 0$ (sans aucun problème de convergence puisque f est nulle sur $\mathbb{R}_-^*$).

- Pour tout réel x positif ou nul, on a : $x f(x) = \dfrac{x^2}{a} e^{-x^2/2a}$.

Or on sait, d'après la question 4b), que : $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi a}} x^2 e^{-x^2/2a} dx = a$.

Par conséquent, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-x^2/2a} dx$ converge (elle converge absolument puisque la fonction intégrée est positive) et est égale à $a\sqrt{2\pi a}$. Comme g est paire, on en déduit : $\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^2/2a} dx = \frac{a\sqrt{2\pi a}}{2}$.

En divisant par a, on obtient : $\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{a} e^{-x^2/2a} dx = \frac{\sqrt{2\pi a}}{2}$.

Ceci s'écrit $\int_0^{+\infty} x f(x) dx = \sqrt{\frac{\pi a}{2}}$.

- Conclusion : les deux points précédents prouvent que X a une espérance, avec de plus :

$$\boxed{E(X) = \sqrt{\frac{\pi a}{2}}}$$

5) a) On a vu, à la question 3), que la variable $Y = \frac{X^2}{2a}$ suit la loi exponentielle de paramètre 1. Ainsi, Y possède une espérance égale à 1, donc, comme $X^2 = 2aY$, on a par linéarité de l'espérance : $E(X^2) = 2aE(Y) = 2a \times 1$.

Conclusion :

$$\boxed{E(X^2) = 2a}$$

b) La variance de X est donnée par : $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 2a - \frac{\pi a}{2}$.

En réduisant au même dénominateur :

$$\boxed{V(X) = \frac{(4-\pi)a}{2}}$$

6) a) • S_n est un estimateur car c'est une fonction d'un échantillon de la loi de X, et cette fonction est indépendante du paramètre a que l'on veut estimer.

- Comme X possède un moment d'ordre 2, les variables X_k aussi, donc S_n possède une espérance, et par linéarité de l'espérance, on a :

$$E(S_n) = \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{n} E(X_k^2) = \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{n} 2a = \frac{1}{2n} \times 2na = a$$

Conclusion :

$$\boxed{S_n \text{ est un estimateur sans biais de } a}$$

b) Toujours grâce à la question 3), on a $X^2 = 2aY$ donc, par propriété de la variance : $V(X^2) = 4a^2 V(Y)$.

Comme $V(Y)=1$, on peut conclure :

$$\boxed{X^2 \text{ possède une variance et } V(X^2)=4a^2}$$

c) X^2 possède une variance donc S_n aussi, et par propriété de la variance, on a : $V(S_n)=\dfrac{1}{4n^2}V\left(\sum_{k=1}^{n}X_k^2\right)$.

Les variables X_k sont mutuellement indépendantes donc les variables X_k^2 le sont aussi, et on peut écrire : $V(S_n)=\dfrac{1}{4n^2}\sum_{k=1}^{n}V\left(X_k^2\right)$.

Comme les X_k ont la même loi que X, elles ont la même variance que X, et ainsi :

$$V\left(X_k^2\right)=V\left(X^2\right)=4a^2$$

On trouve alors : $V(S_n)=\dfrac{1}{4n^2}\sum_{k=1}^{n}4a^2=\dfrac{1}{4n^2}\times n\times 4a^2=\dfrac{a^2}{n}$.

Pour finir, le biais de S_n est nul, on en déduit : $r_a(S_n)=V(S_n)+b_a(S_n)^2=V(S_n)$, et ainsi :

$$\boxed{r_\theta(S_n)=\frac{a^2}{n}}$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}r_a(S_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a^2}{n}=0$, on peut conclure (c'est une condition suffisante) :

$$\boxed{S_n \text{ est un estimateur convergent de } a}$$

7) a) L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev appliquée à S_n s'écrit :

$$\forall\varepsilon>0,\ P(|S_n-E(S_n)|\geq\varepsilon)\leq\frac{V(S_n)}{\varepsilon^2}$$

Finalement :

$$\boxed{\forall\varepsilon>0,\ P(|S_n-a|\geq\varepsilon)\leq\frac{a^2}{n\varepsilon^2}}$$

Comme on suppose $a\leq 1$, on peut prolonger :

$$\forall\varepsilon>0,\ P(|S_n-a|\geq\varepsilon)\leq\frac{1}{n\varepsilon^2}$$

On en déduit (événement contraire) : $\forall\varepsilon>0,\ 1-P(|S_n-a|<\varepsilon)\leq\dfrac{1}{n\varepsilon^2}$.

Ceci donne alors : $\forall\varepsilon>0,\ P(|S_n-a|<\varepsilon)\geq 1-\dfrac{1}{n\varepsilon^2}$.

Comme $(|S_n - a| < \varepsilon) \subset (|S_n - a| \leq \varepsilon)$, on obtient, par croissance de la probabilité :

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ P(|S_n - a| \leq \varepsilon) \geq 1 - \frac{1}{n\varepsilon^2}}$$

b) On peut aussi écrire $P(|a - S_n| \leq \varepsilon) \geq 1 - \frac{1}{n\varepsilon^2}$, soit :

$$P(-\varepsilon \leq a - S_n \leq \varepsilon) \geq 1 - \frac{1}{n\varepsilon^2}$$

On a donc :

$$P(S_n - \varepsilon \leq a \leq S_n + \varepsilon) \geq 1 - \frac{1}{n\varepsilon^2}$$

On peut affirmer que l'intervalle $[S_n - \varepsilon, S_n + \varepsilon]$ est un intervalle de confiance pour *a*, avec un niveau de confiance au moins égal à $1 - \frac{1}{n\varepsilon^2}$.

Pour finir, il suffit de choisir $\varepsilon = \frac{1}{10}$, qui est bien strictement positif, ce qui donne : $P\left(S_n - \frac{1}{10} \leq a \leq S_n + \frac{1}{10}\right) \geq 1 - \frac{100}{n}$.

Avec $n = 2000$, on obtient :

$$P\left(S_n - \frac{1}{10} \leq a \leq S_n + \frac{1}{10}\right) \geq 1 - \frac{1}{20}$$

Conclusion : $\left[S_n - \frac{1}{10}, S_n + \frac{1}{10}\right]$ est un intervalle de confiance pour *a*, avec un niveau de confiance au moins égal à $\frac{19}{20}$, soit 95%.

Problème ....

Partie 1

1) a) Remarquons tout d'abord que *f* est bien définie sur $\mathbb{R}$ car $t \mapsto \ln(1+t^2)$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc sur tout intervalle de la forme $[0, x]$ ou $[x, 0]$.

Comme $1 + t^2 \geq 1$, on a $\ln(1+t^2) \geq 0$. Ainsi, il y a deux cas à étudier :

- Si $x \geq 0$, $f(x)$ est positif, comme intégrale, bornes dans l'ordre croissant d'une fonction positive.
- Si $x \leq 0$, $f(x)$ est négatif, comme intégrale, bornes dans l'ordre décroissant d'une fonction positive.

$$\boxed{f(x) \text{ est positif sur } \mathbb{R}_+ \text{ et négatif sur } \mathbb{R}_-}$$

b) La fonction $g : t \mapsto \ln(1+t^2)$ est continue sur $\mathbb{R}$ et *f* est une primitive de *g* (celle qui s'annule en 0) donc *f* est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
Par définition, on a $f'(x) = g(x)$, ce qui donne :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \ln(1+x^2)}$$

c) On a déjà vu que, pour tout réel *x*, $\ln(1+x^2)$ est positif (en s'annulant seulement en 0) donc :

$$\boxed{f \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}}$$

2) a) La fonction *f* est définie sur $\mathbb{R}$ qui est centré en 0 et en effectuant le changement de variable $u = -t$, qui est bien de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ (donc sur $[0, x]$ ou $[x, 0]$), on a :

$$f(-x) = \int_0^{-x} \ln(1+t^2)dt = \int_0^x \ln\left(1+(-u)^2\right)(-du) = -\int_0^x \ln(1+u^2)du = -f(x)$$

En conclusion :

$$\boxed{f \text{ est impaire}}$$

b) La fonction f' est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ (composée de fonctions usuelles de classe C^1) et on a : $\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$.
La dérivée seconde de *f* s'annule en changeant de signe en 0, elle est négative sur $\mathbb{R}_-$ et positive sur $\mathbb{R}_+$ ce qui prouve que *f* est concave sur $\mathbb{R}_-$, convexe sur $\mathbb{R}_+$ et que le seul point d'inflexion de la courbe représentative de *f* est le point $(0,0)$, origine du repère.

3) a) On a : $\forall t \in \mathbb{R}$, $a + \dfrac{b}{1+t^2} = \dfrac{a+b+at^2}{1+t^2}$, ce qui implique :

$$\frac{t^2}{1+t^2} = a + \frac{b}{1+t^2} \Leftrightarrow \frac{t^2}{1+t^2} = \frac{a+b+at^2}{1+t^2} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=0 \\ a=1 \end{cases}$$ (par identification des coefficients au numérateur). On a donc : $a = 1$ et $b = -1$.
Bilan :

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R},\ \frac{t^2}{1+t^2} = 1 - \frac{1}{1+t^2}}$$

b) $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \int_0^x 1 \times \ln(1+t^2)dt$.

En posant $u(t) = \ln(1+t^2)$ et $v'(t) = 1$, on a $u'(t) = \dfrac{2t}{1+t^2}$ et on peut prendre $v(t) = t$.

Les fonctions u et v sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ donc on peut procéder à l'intégration par parties, ce qui donne :

$f(x) = \left[t\ln\left(1+t^2\right)\right]_0^x - 2\int_0^x \frac{t^2}{1+t^2}dt = x\ln\left(1+x^2\right) - 2\int_0^x \frac{t^2}{1+t^2}dt$.

En utilisant la question précédente, on obtient :

$f(x) = x\ln\left(1+x^2\right) - 2\int_0^x \left(1-\frac{1}{1+t^2}\right)dt = x\ln\left(1+x^2\right) - 2\int_0^x 1dt + 2\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt$.

Par linéarité de l'intégration, on en déduit :

$$f(x) = x\ln\left(1+x^2\right) - 2x + 2\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt$$

Finalement :

$$\boxed{f(x) = x\left(\ln\left(1+x^2\right) - 2\right) + 2\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt}$$

4) a) La fonction $h : t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc sur $\mathbb{R}_+$, ce qui prouve que l'intégrale proposée ne pose un problème que par la présence de la borne $+\infty$.

Au voisinage de $+\infty$, on a $\frac{1}{1+t^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}$ et, comme l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt$ est convergente (en tant qu'intégrale de Riemann de paramètre $2>1$), on en déduit, grâce au critère d'équivalence pour les intégrales de fonctions continues et positives, que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}dt$ est également convergente.

Par continuité de la fonction intégrée, l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}dt$ existe donc, en tout :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}dt \text{ est une intégrale convergente}}$$

b) La convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}dt$ signifie que $\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt$ possède une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\ln\left(1+x^2\right)-2\right) = +\infty$, on en déduit que $\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt$ est négligeable devant $x\left(\ln\left(1+x^2\right)-2\right)$ au voisinage de $+\infty$, donc, d'après l'égalité obtenue à la question 3b) : $f(x) \underset{+\infty}{\sim} x\left(\ln\left(1+x^2\right)-2\right)$.

Comme 2 est négligeable devant $\ln\left(1+x^2\right)$, on peut simplifier et il reste :

$$\boxed{f(x) \underset{+\infty}{\sim} x\ln\left(1+x^2\right)}$$

c) Pour tout réel x, on a : $\ln\left(1+x^2\right) = \ln\left(x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right) = \ln\left(x^2\right) + \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$

On sait que $\ln(x^2)=2\ln|x|$, donc, pour tout réel x *strictement positif*, on a :

$$\boxed{\ln\left(1+x^2\right)=2\ln x+\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}$$

Pour finir, $\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$ donc $\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$ est négligeable devant $2\ln x$ (qui tend vers $+\infty$), et ainsi on a $\ln\left(1+x^2\right)\underset{+\infty}{\sim}2\ln x$.
On peut maintenant conclure :

$$\boxed{f(x)\underset{+\infty}{\sim}2x\ln x}$$

d) Pour tout réel x négatif, on a, par imparité de f : $f(x)=-f(-x)$.
Quand x tend vers $-\infty$, on a $-x$ qui tend vers $+\infty$ et on peut appliquer l'équivalent précédent, ce qui donne : $f(x)\underset{-\infty}{\sim}-2(-x)\ln(-x)$
En simplifiant :

$$\boxed{f(x)\underset{-\infty}{\sim}2x\ln(-x)}$$

5) a) La fonction f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et on a : $\forall x\in\mathbb{R}$, $f''(x)=\dfrac{2x}{1+x^2}$. Dès lors on voit que f'' est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ comme quotient bien défini de fonctions de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
En conclusion :

$$\boxed{f \text{ est de classe } C^3 \text{ sur } \mathbb{R}}$$

b) On a : $f(x)=\int_0^x \ln\left(1+t^2\right)dt$

$$f'(x)=\ln\left(1+x^2\right)$$

$$f''(x)=\frac{2x}{1+x^2}$$

$$f^{(3)}(x)=\frac{2\left(1+x^2\right)-2x\times 2x}{\left(1+x^2\right)^2}=\frac{2\left(1+x^2\right)-4x^2}{\left(1+x^2\right)^2}=\frac{2\left(1-x^2\right)}{\left(1+x^2\right)^2}$$

On en déduit :

$$\boxed{f(0)=0,\ f'(0)=0,\ f''(0)=0 \text{ et } f^{(3)}(0)=2}$$

c) En appliquant la formule rappelée, on trouve : $f(x)=\dfrac{x^3}{3}+o\left(x^3\right)$.

On obtient par conséquent :

$$\boxed{f(x) \underset{0}{\sim} \frac{x^3}{3}}$$

6) Grâce au théorème de transfert, on peut considérer l'intégrale $f(1)=\int_0^1 \ln(1+t^2)dt$ comme l'espérance de la variable aléatoire $V=\ln(1+U^2)$, où U suit la loi uniforme sur $[0,1]$.
On obtient une valeur approchée de l'espérance de V en calculant la moyenne empirique $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} V_k$, où $(V_1,\ldots,V_n)$ est un échantillon de la loi de V et où n est assez grand. On peut donc proposer (ici avec $n=100000$) :

```
U=grand(1,100 000,'unf',0,1)
V=log(1+U.^2)
f=mean(V)
disp(f)
```

Partie 2

7) a) Avec la convention $x^0=1$, on a $u_0=\int_0^1 \left(\ln(1+t^2)\right)^0 dt=\int_0^1 1\,dt=1$ donc la valeur donnée à u_0 est cohérente avec l'expression générale de u_n.

b) On a $u_1=\int_0^1 \left(\ln(1+t^2)\right)^1 dt=\int_0^1 \ln(1+t^2)^1 dt=f(1)$.

8) a) Calculons : $u_{n+1}-u_n=\int_0^1 \left(\ln(1+t^2)\right)^{n+1} dt-\int_0^1 \left(\ln(1+t^2)\right)^n dt$.
Par linéarité de l'intégration, on obtient :

$$u_{n+1}-u_n=\int_0^1 \left(\left(\ln(1+t^2)\right)^{n+1}-\left(\ln(1+t^2)\right)^n\right)dt$$

En factorisant :

$$u_{n+1}-u_n=\int_0^1 \left(\ln(1+t^2)\right)^n \left(\ln(1+t^2)-1\right)dt$$

Comme $0\le t^2\le 1$, on a $1\le 1+t^2\le 2$ donc $0\le \ln(1+t^2)\le \ln 2$.

On a donc $\left(\ln(1+t^2)\right)^n\ge 0$ et $\ln(1+t^2)-1\le \ln 2-1<0$ (car $\ln 2\approx 0,7$).
On en déduit que $u_{n+1}-u_n$ est l'intégrale, bornes dans l'ordre croissant, d'une fonction négative, ce qui prouve que : $u_{n+1}-u_n\le 0$.
Conclusion :

$$\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante}}$$

b) On a $\left(\ln\left(1+t^2\right)\right)^n \geq 0$ et $u_n = \int_0^1 \left(\ln\left(1+t^2\right)\right)^n dt$ donc u_n est l'intégrale, bornes dans l'ordre croissant, d'une fonction positive, ce qui prouve que : $u_n \geq 0$.

$$\boxed{\text{La suite } \left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est minorée par } 0}$$

La suite $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée donc elle converge.

9) a) On a $0 \leq \ln\left(1+t^2\right) \leq \ln 2$ (déjà vu avant) et, en élevant à la puissance n-ième (tout est positif et la fonction $t \mapsto t^n$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$), on obtient :

$$0 \leq \left(\ln\left(1+t^2\right)\right)^n \leq (\ln 2)^n$$

En intégrant de 0 à 1 (bornes dans l'ordre croissant), on a :

$$0 \leq \int_0^1 \left(\ln\left(1+t^2\right)\right)^n dt \leq \int_0^1 \left(\ln 2\right)^n dt$$

Conclusion:

$$\boxed{0 \leq u_n \leq \left(\ln 2\right)^n}$$

b) Comme $\ln 2 \in]-1,1[$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} (\ln 2)^n = 0$ donc, par encadrement, on trouve :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 0}$$

Comme $\ln 2 \in]-1,1[$, la série de terme général $(\ln 2)^n$ est convergente en tant que série géométrique dont la raison appartient à $]-1,1[$. Le critère de comparaison pour les séries à termes positifs assure que :

$$\boxed{\text{La série de terme général } u_n \text{ converge}}$$

10) a) On a vu que : $\ln\left(1+t^2\right) \leq \ln 2$ donc $1-\ln\left(1+t^2\right) \geq 1-\ln 2$. Comme tout est strictement positif, on peut inverser : $0 < \dfrac{1}{1-\ln\left(1+t^2\right)} \leq \dfrac{1}{1-\ln 2}$.

En multipliant par $\left(\ln\left(1+t^2\right)\right)^n \geq 0$, on a : $0 \leq \dfrac{\left(\ln\left(1+t^2\right)\right)^n}{1-\ln\left(1+t^2\right)} \leq \dfrac{\left(\ln\left(1+t^2\right)\right)^n}{1-\ln 2}$.

En intégrant de 0 à 1 (bornes dans l'ordre croissant), on obtient :

$$0 \leq \int_0^1 \frac{\left(\ln\left(1+t^2\right)\right)^n}{1-\ln\left(1+t^2\right)} dt \leq \frac{1}{1-\ln 2}\int_0^1 \left(\ln\left(1+t^2\right)\right)^n dt$$

Conclusion :

$$\boxed{0 \leq \int_0^1 \frac{\left(\ln\left(1+t^2\right)\right)^n}{1-\ln\left(1+t^2\right)} dt \leq \frac{u_n}{1-\ln 2}}$$

b) Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, on a, par encadrement :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \frac{\left(\ln\left(1+t^2\right)\right)^n}{1-\ln\left(1+t^2\right)}dt = 0}$$

c) Comme $\sum\limits_{k=0}^{n-1} u_k = \sum\limits_{k=0}^{n-1}\int_0^1\left(\ln\left(1+t^2\right)\right)^k dt$, on a, par linéarité de l'intégration :

$$\sum_{k=0}^{n-1} u_k = \int_0^1 \sum_{k=0}^{n-1}\left(\ln\left(1+t^2\right)\right)^k dt$$

On reconnaît la somme des n premiers termes d'une suite géométrique de raison $\ln\left(1+t^2\right)$ différente de 1 et on trouve bien :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n-1} u_k = \int_0^1 \frac{1-\left(\ln\left(1+t^2\right)\right)^n}{1-\ln\left(1+t^2\right)}dt}$$

d) Par linéarité de l'intégration, on a :

$$\sum_{k=0}^{n-1} u_k = \int_0^1 \frac{1}{1-\ln\left(1+t^2\right)}dt - \int_0^1 \frac{\left(\ln\left(1+t^2\right)\right)^n}{1-\ln\left(1+t^2\right)}dt$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1 \frac{\left(\ln\left(1+t^2\right)\right)^n}{1-\ln\left(1+t^2\right)}dt = 0$, le membre de droite a une limite finie donc le membre de gauche aussi, et après passage à la limite, on obtient :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \int_0^1 \frac{1}{1-\ln\left(1+t^2\right)}dt}$$

e) Il faut cette fois trouver une valeur approchée de l'espérance de la variable $W = \frac{1}{1-\ln\left(1+U^2\right)}$, où U suit la loi uniforme sur $[0,1]$. On peut alors proposer :

```
U=grand(1,100 000,'unf',0,1)
W=(1-log(1+U.^2)).^-1
S=mean(W)
disp(S)
```

Concours d'admission sur classes préparatoires
Option économique

RAPPORT DU JURY
ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES
2018

Présentation de l'épreuve

• L'épreuve comportait, comme d'habitude, trois exercices et un problème, ce qui permettait de juger les candidats sur une partie conséquente du programme des classes préparatoires.
• Le sujet balayait largement le programme en donnant, comme d'habitude, une place importante aux probabilités (deuxième et troisième exercices).
La diversité des thèmes abordés a permis à tous les candidats de s'exprimer et de montrer leurs compétences, ne serait-ce que sur une partie du programme.
• Deux exercices et le problème comportaient une ou deux questions d'informatique.
• Dans l'ensemble, les correcteurs ont trouvé le sujet un peu long (comme d'habitude), parcourant une bonne partie du programme d'ECE, équilibré, bien adapté au public concerné (de nombreuses questions étaient faisables), et suffisamment discriminant par la présence de questions techniquement difficiles ou abstraites.

Description du sujet

L'exercice 1 proposait l'étude de l'endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ défini par $f(M) = AM$, où A est une matrice quelconque de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Une première partie s'intéressait au cas où $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$, avec détermination du noyau, de l'image et des sous-espaces propres de f.
Cet exercice a été abordé avec des fortunes diverses, surtout dans les dernières questions, mais c'est globalement le mieux réussi.

L'exercice 2, portait sur la partie probabilités du programme et étudiait le lancer d'une pièce choisie au hasard parmi trois pièces : une pièce numérotée 0, pour laquelle la probabilité d'obtenir "pile" valait $\frac{1}{2}$ et celle d'obtenir "face" valait également $\frac{1}{2}$, une pièce numérotée 1, donnant "face" à coup sûr et une troisième pièce, numérotée 2, donnant "pile" à coup sûr.
L'objectif était de déterminer les lois de X, Y et $X+Y$ où X désignait le rang du premier "pile" obtenu et Y celui du premier "face". Un script, s'il était complété correctement, permettait d'obtenir une simulation de X.
Comme d'habitude, la formule des probabilités totales a été copieusement martyrisée par de nombreux candidats et cet exercice a permis de départager de façon tranchée les candidats. Il est le moins bien réussi avec le problème.

L'exercice 3 portant également sur la partie probabilités du programme, avait pour objectif principal d'estimer, ponctuellement et par intervalle de confiance, le paramètre a strictement positif de la loi suivie par une variable aléatoire X dont une densité était donnée par :

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{a}e^{-x^2/2a} & \text{si } x\geq 0\\ 0 \text{ si } x<0\end{cases}$$

Avant ceci, on donnait une simulation de la variable X, puis on calculait espérance et variance de X. L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev est mal maîtrisée par de nombreux candidats.

Le problème, portant sur le programme d'analyse proposait, dans la première partie, l'étude d'une intégrale fonction de sa borne supérieure, à savoir la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\int_0^x \ln\left(1+t^2\right)dt$$

On cherchait plus précisément des équivalents de $f(x)$ aux voisinages de $-\infty$, 0 et $+\infty$.
La deuxième partie avait pour objectif d'étudier une suite associée à cette fonction, à savoir la suite (u_n) définie par :

$$u_n=\int_0^1\left(\ln\left(1+t^2\right)\right)^n dt$$

On souhaitait notamment montrer que la série de terme général u_n convergeait et ensuite, établir le résultat suivant :

$$\sum_{k=0}^{+\infty}u_k=\int_0^1\frac{1}{1-\ln\left(1+t^2\right)}dt$$

Le problème a souvent été le moins abordé et le moins bien réussi (avec l'exercice 2, comme déjà signalé plus haut).

Statistiques

• Pour l'ensemble des 3844 candidats ayant composé, la moyenne obtenue à cette épreuve est égale à 10,738 sur 20 (presque identique à celle de l'année dernière) et l'écart type vaut 6,354 (supérieur de 0,3 point à celui de l'année dernière, et toujours très important).

• 38,6% des candidats, contre 37,2% l'année dernière, ont une note strictement inférieure à 8 (dont 17,5%, ont une note inférieure à 4 contre 16,4% l'année dernière).

• 18,8% des candidats ont une note comprise entre 8 et 12 (pourcentage un peu inférieur à celui de 2017 qui était égal à 19,7%).

• 27,3% des candidats ont une note supérieure ou égale à 16 (pourcentage supérieur à celui de 2017 qui était égal à 24,3%).

Conclusion

Comme l'an dernier, le niveau est très hétérogène et l'impression générale ressentie à la lecture des copies amène à penser que les questions les plus subtiles, qui demandent une compréhension fine de la théorie, quel que soit le domaine concerné, échappent à presque tous les candidats. Les meilleurs ont acquis des techniques et des réflexes mais ne comprennent pas forcément ce qu'ils font.

Les copies sont, dans l'ensemble, bien présentées malgré la présence d'un nombre assez élevé de candidats qui ne respectent pas la numérotation des questions, voire même l'oublient, écrivent mal (ce sont souvent les mêmes) et rendent la tâche du correcteur pénible : qu'ils sachent qu'ils n'ont rien à gagner à pratiquer de la sorte, bien au contraire.
Pour terminer ce paragraphe, il reste toujours un noyau de candidats qui ne peuvent s'empêcher de faire du remplissage au lieu d'argumenter face aux questions dont le résultat est donné : ceci est vécu comme une fraude (mot utilisé par plusieurs correcteurs)

Les candidats ne doivent pas oublier qu'une épreuve de concours valide deux années d'étude : il faut donc garder en tête les connaissances de première année.

L'investissement en informatique, à peu près stable par rapport à l'année dernière, a permis à de nombreux candidats de glaner des points sans y passer énormément de temps, certains correcteurs trouvant d'ailleurs que le barème était trop généreux de ce point de vue.
Précisons pour les futurs candidats qu'ils ne sont pas obligés de recopier les énoncés des questions avant de les traiter et qu'ils ne sont pas, non plus, obligés de recopier tout un programme d'informatique si la question posée était seulement de compléter quelques instructions manquantes.

Rappelons, comme d'habitude, que l'honnêteté, la simplicité, la précision et la rigueur sont des vertus attendues par tous les correcteurs sans exception, et qu'une bonne réponse est toujours une réponse construite rigoureusement.