BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

Conception : EDHEC

OPTION SCIENTIFIQUE

MATHÉMATIQUES

18 mai 2018, de 8 h. à 12 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice 1

La lettre n désigne un entier naturel non nul.
Soit f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f_n(x) = 1 - x - x^n$.

1) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ d'inconnue x possède une seule solution, notée u_n.

2) a) Vérifier que u_n appartient à $]0, 1[$.
   b) En déduire le signe de $f_{n+1}(u_n)$ puis établir que la suite (u_n) est croissante.
   c) Conclure que la suite (u_n) converge et que sa limite appartient à $[0, 1]$.
   d) Montrer par l'absurde que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$.

3) Pour tout entier naturel n non nul, on pose $v_n = 1 - u_n$.
   a) Justifier que v_n est strictement positif, puis montrer que $\ln v_n \underset{+\infty}{\sim} -n v_n$.
   b) Établir que $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\ln\left(\dfrac{-\ln v_n}{n v_n}\right)}{-\ln v_n} = 0$ et en déduire que : $\ln v_n \underset{+\infty}{\sim} -\ln n$.
   c) Montrer enfin que : $v_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\ln n}{n}$.

4) Donner la nature des séries de termes généraux v_n et v_n^2.

Exercice 2

On considère l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$, muni du produit scalaire noté $\langle\, ,\rangle$ défini par :

$$\forall (x,y)\in(\mathbb{R}^3)^2,\ x=(x_1,x_2,x_3),\ y=(y_1,y_2,y_3),\ \langle x,y\rangle = x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3$$

La norme du vecteur x est alors définie par : $\| x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$.

On considère un endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ qui vérifie la condition suivante :

$$\forall (x,y)\in(\mathbb{R}^3)^2,\ \langle f(x),y\rangle = -\langle x,f(y)\rangle$$

1) Établir que : $\forall x\in\mathbb{R}^3$, $\langle f(x),x\rangle = 0$.

2) On admet que tout endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ admet au moins une valeur propre réelle. Montrer, en utilisant l'égalité obtenue à la question 1), que 0 est la seule valeur propre réelle de f.

Dans la suite, on se propose de montrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est de la forme :

$$A=\begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0\\ -\alpha & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, \text{ avec } \alpha \text{ réel}$$

3) Montrer que $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont supplémentaires orthogonaux dans $\mathbb{R}^3$.

4) Résoudre le problème posé si $\dim \mathrm{Ker}(f) = 3$.

5) On suppose, dans cette question, que $\dim \mathrm{Ker}(f) = 2$.

a) Montrer que l'on peut trouver une base orthonormale $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$, où e_1 appartient à $\mathrm{Im}(f)$ et où (e_2, e_3) est une base orthonormale de $\mathrm{Ker}(f)$.

b) Montrer que la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est de la forme : $A=\begin{pmatrix} a & 0 & 0\\ b & 0 & 0\\ c & 0 & 0\end{pmatrix}$.

c) Vérifier que $\mathrm{Im}(f)$ est stable par f puis montrer que b et c sont nuls.

d) En considérant le réel $\langle f(e_1),e_1\rangle$, donner la valeur de a. Que dire de l'hypothèse $\dim \mathrm{Ker}(f) = 2$?

6) On suppose, dans cette question, que $\dim \mathrm{Ker}(f) = 1$.

a) Montrer que l'on peut trouver une base orthonormale $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$, où (e_1, e_2) est une base orthonormale de $\mathrm{Im}(f)$ et où e_3 appartient à $\mathrm{Ker}(f)$.

b) Montrer que la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est de la forme : $A=\begin{pmatrix} a & b & 0\\ c & d & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

c) Montrer que a et d sont nuls et que $c=-b$.

d) Conclure.

Exercice 3

On admet que toutes les variables aléatoires considérées dans cet exercice sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},P)$ que l'on ne cherchera pas à déterminer.

On considère une variable aléatoire X suivant la loi exponentielle de paramètre $\dfrac{1}{2}$ et on pose $Y=\sqrt{X}$.

1) On rappelle qu'en `Scilab`, la commande `grand(1,1,'exp',1/lambda)` simule une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ. Écrire une (ou des) commande(s) `Scilab` utilisant `grand` et permettant de simuler *Y*.

2) a) Déterminer la fonction de répartition F_Y de *Y*.

b) En déduire une densité f_Y de *Y*.

3) a) Rappeler la valeur du moment d'ordre 2 d'une variable aléatoire *Z* suivant la loi normale centrée réduite.

b) En déduire que *Y* a une espérance et donner sa valeur.

4) On pose $U = 1 - e^{-X/2}$.

a) Vérifier que $U(\Omega) = [0,1[$.

b) Déterminer la fonction de répartition F_U de *U* et reconnaître la loi de *U*.

c) Exprimer *X* en fonction de *U*, puis en déduire une simulation `Scilab` de *Y* utilisant uniquement la fonction `rand`.

Problème

Dans ce problème, on désigne par λ un réel strictement positif.
On admet que toutes les variables aléatoires présentées dans ce problème sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ que l'on ne cherchera pas à déterminer.

On s'intéresse aux appels parvenant à un central téléphonique et on suppose, d'une part, qu'ils arrivent de façon indépendante au central, et d'autre part, que le nombre d'appels reçus par le central pendant un certain intervalle de temps est indépendant du nombre d'appels reçus par le central pendant un intervalle de temps disjoint du précédent.

Pour tout réel *t* positif, on note N_t la variable aléatoire égale au nombre d'appels reçus par le central pendant l'intervalle de temps $[0,t]$ et on pose, pour tout entier naturel *n* : $p_n(t) = P(N_t = n)$.

1) Justifier que $p_0(0) = 1$ et $p_n(0) = 0$ pour *n* supérieur ou égal à 1. En déduire la loi de N_0.

On admet que, pour tout entier naturel *n*, p_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et que :

$$\forall t \geq 0 \, , \begin{cases} p_0'(t) = -\lambda p_0(t) \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \; p_n'(t) = -\lambda p_n(t) + \lambda p_{n-1}(t) \end{cases}$$

2) Pour tout entier naturel *n* et pour tout réel *t* positif, on pose : $f_n(t) = e^{\lambda t} p_n(t)$.

a) Montrer que la fonction f_0 est constante, puis utiliser la première question pour déterminer cette constante.

b) Exprimer, pour tout *n* de $\mathbb{N}^*$, $f_n'(t)$ en fonction de λ et $f_{n-1}(t)$.

c) On suppose que, pour un certain entier naturel *n* non nul, on a : $\forall t \geq 0 \, , \; f_{n-1}(t) = \dfrac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}$.

(i) Montrer qu'il existe une constante K telle que : $\forall t \geq 0 \, , \; f_n(t) = \dfrac{(\lambda t)^n}{n!} + K$.

(ii) En utilisant la valeur de $p_n(0)$ pour *n* supérieur ou égal à 1, donner l'expression explicite de $f_n(t)$ en fonction de λ, *n* et *t*.

3) a) Donner $p_n(t)$ pour tout entier naturel n et pour tout réel t positif.

b) Conclure que N_t suit la loi de Poisson de paramètre λt.

4) Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on note S_n la variable aléatoire égale à l'instant où survient le n-ième appel.

a) Comparer, pour tout réel t positif, les événements $(S_1 > t)$ et $(N_t = 0)$ puis reconnaître la loi de S_1.

b) Comparer, pour tout réel t positif, les événements : $(S_n > t)$ et $(N_t \leq n-1)$.

c) Montrer que S_n est une variable à densité dont une densité est la fonction f_n définie par :

$$f_n(t) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^n t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t} \text{ si } t > 0 \\ 0 \text{ si } t \leq 0 \end{cases}$$

5) Soit (t, u) un couple de réels positifs tels que $u < t$.

a) Justifier sans calcul que les variables aléatoires N_u et $N_t - N_u$ sont indépendantes.

b) Établir l'égalité suivante : $\forall n \in \mathbb{N},\ P(N_t = n) = \sum_{i=0}^{n} P(N_u = i) P(N_t - N_u = n - i)$.

c) En déduire la valeur de $P(N_t - N_u = 0)$ puis celle de $P(N_t - N_u = 1)$.

d) Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ P(N_t - N_u = n) = \dfrac{[\lambda(t-u)]^n}{n!} e^{-\lambda(t-u)}$.

6) On pose, pour tout ω de Ω, $R_t(\omega) = \begin{cases} S_{N_t(\omega)}(\omega) \text{ si } N_t(\omega) \geq 1 \\ 0 \text{ si } N_t(\omega) = 0 \end{cases}$ et on admet que R_t est une variable aléatoire.

a) Décrire ce que représente la variable aléatoire R_t.

b) Utiliser le système complet d'événements $(N_t = n)_{n \in \mathbb{N}}$ pour montrer que :

$$\forall t > 0,\ \forall u \in [0, t],\ P(R_t > u) = \sum_{n=1}^{+\infty} P([S_n > u] \cap [N_t = n])$$

c) Utiliser la question 4b) pour établir la relation :

$$\forall t > 0,\ \forall u \in [0, t],\ P(R_t > u) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{i=0}^{n-1} P([N_u = i] \cap [N_t - N_u = n - i])$$

d) Montrer enfin que la fonction de répartition de R_t est la fonction F_t définie par :

$$F_t(u) = \begin{cases} 0 \text{ si } u < 0 \\ e^{-\lambda(t-u)} \text{ si } 0 \leq u \leq t \\ 1 \text{ si } u > t \end{cases}$$

e) La variable R_t est-elle à densité ? Est-elle discrète ?

Corrigé

Exercice 1 ....

1) La fonction f_n est dérivable (car polynomiale) sur $\mathbb{R}_+$ et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f_n'(x) = -1 - nx^{n-1} < 0 \text{ (car } x \text{ est positif)}$$

La fonction f_n est donc continue (car dérivable) et strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$, de plus on a $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = -\infty$ et $f_n(0) = 1$, donc f_n réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ vers $]-\infty, 1]$.

Comme 0 appartient à $]-\infty, 1]$, l'équation $f_n(x) = 0$ possède une seule solution que l'on note u_n.

2) a) Comme $f_n(0) = 1$ et $f_n(1) = -1$, on a : $f_n(1) < f_n(u_n) < f_n(0)$. La stricte décroissance de f_n assure alors que :

$$\boxed{0 < u_n < 1}$$

b) Par définition de f_{n+1}, on a : $f_{n+1}(u_n) = 1 - u_n - u_n^{n+1}$

Comme $f_n(u_n) = 0$, on a $1 - u_n = u_n^n$ et on obtient :

$$f_{n+1}(u_n) = u_n^n - u_n^{n+1} = u_n^n(1 - u_n)$$

On sait que u_n appartient à $]0,1[$ donc :

$$\boxed{f_{n+1}(u_n) > 0}$$

Par définition de u_{n+1}, on a $f_{n+1}(u_{n+1}) = 0$ et ainsi, l'inégalité précédente s'écrit :

$$f_{n+1}(u_n) > f_{n+1}(u_{n+1})$$

La stricte décroissance de f_{n+1} assure alors que : $u_n < u_{n+1}$

Conclusion :

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est croissante}}$$

c) La suite (u_n) est croissante et majorée (par 1) donc elle est convergente.

d) Comme, pour tout n de $\mathbb{N}$, u_n appartient à $]0,1[$, la limite ℓ de la suite (u_n) appartient à $[0,1]$ et comme la suite (u_n) est croissante, on a : $0 \le u_n \le \ell$.

En élevant à la puissance n (on peut car tout est positif), on obtient : $0 \le u_n^n \le \ell^n$.

Si l'on avait ℓ élément de $[0,1[$, on aurait $\lim\limits_{n\to+\infty} \ell^n = 0$, et par encadrement, on aurait $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n^n = 0$. En injectant ce résultat dans la relation $1-u_n = u_n^n$ et en passant à la limite, on trouverait $\ell = 1$, ce qui contredit l'hypothèse de départ.
Pour résumer, on a montré (par l'absurde) que :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 1}$$

3) a) Comme u_n appartient à $]0,1[$, on a en particulier $u_n < 1$, ce qui montre que :

$$\boxed{v_n > 0}$$

Pour tout entier naturel *n*, on a : $\ln v_n = \ln(1-u_n) = \ln(u_n^n) = n\ln u_n = n\ln(1-v_n)$.
Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ et $\ln(1-v_n) \underset{+\infty}{\sim} -v_n$
Par compatibilité des équivalents avec la multiplication, on trouve :

$$\boxed{\ln v_n \underset{+\infty}{\sim} -n\,v_n}$$

b) D'après l'équivalent précédent, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{-\ln v_n}{nv_n}\right) = 1$ et, par continuité de la fonction ln en 1, on en déduit :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{-\ln v_n}{nv_n}\right) = 0}$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} (-\ln v_n) = +\infty$ donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln\left(\dfrac{-\ln v_n}{nv_n}\right)}{-\ln v_n} = 0$.
Ceci s'écrit $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{\ln(-\ln v_n) - \ln n - \ln v_n}{-\ln v_n}\right) = 0$ et on en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\ln(-\ln v_n)}{-\ln v_n} + \frac{\ln n}{\ln v_n} + 1\right) = 0$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(-\ln v_n)}{-\ln v_n} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$, il reste : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{\ln n}{\ln v_n} + 1\right) = 0$.
Ceci prouve que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln n}{\ln v_n} = -1$, ou encore que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{-\ln n}{\ln v_n} = 1$.
On peut conclure :

$$\boxed{\ln v_n \underset{+\infty}{\sim} -\ln n}$$

c) On a vu que $\ln v_n \underset{+\infty}{\sim} -\ln n$ et que $\ln v_n \underset{+\infty}{\sim} -n\,v_n$ donc, par transitivité de la relation d'équivalence, on a : $-\ln n \underset{+\infty}{\sim} -n\,v_n$.

On peut conclure :

$$\boxed{v_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln n}{n}}$$

4) On sait que $v_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\ln n}{n}$ et pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, on a $\dfrac{\ln n}{n} \geq \dfrac{1}{n}$. Comme la série de terme général $\dfrac{1}{n}$ diverge (série de Riemann de paramètre 1), le critère de comparaison pour les séries à termes positifs prouve que la série de terme général $\dfrac{\ln n}{n}$ diverge également. Enfin, le critère d'équivalence, toujours pour les séries à termes positifs, assure que :

$$\boxed{\text{La série de terme général } v_n \text{ diverge}}$$

Par compatibilité des équivalents avec l'élévation au carré, on a : $v_n^2 \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{(\ln n)^2}{n^2}$

On a $\lim\limits_{n\to+\infty} n^{3/2} v_n^2 = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(\ln n)^2}{n^{1/2}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{\ln n}{n^{1/4}}\right)^2 = 0$ donc $v_n^2 \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^{3/2}}\right)$. Comme la série de terme général $\dfrac{1}{n^{3/2}}$ (série de Riemann de paramètre $\dfrac{3}{2} > 1$), le critère de comparaison pour les séries à termes positifs prouve que :

$$\boxed{\text{La série de terme général } v_n^2 \text{ converge}}$$

Exercice 2 ....

1) D'après la définition d'un endomorphisme antisymétrique, on a, avec $y = x$:

$$\forall x \in \mathbb{R}^3,\ \langle f(x), x\rangle = -\langle x, f(x)\rangle$$

Par symétrie du produit scalaire, on en déduit : $\forall x \in \mathbb{R}^3,\ 2\langle f(x), x\rangle = 0$.

Conclusion :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^3,\ \langle f(x), x\rangle = 0}$$

2) Soit λ une valeur propre de f, alors si l'on considère un vecteur propre x non nul, associé, on a $\langle \lambda x, x\rangle = 0$, et par bilinéarité du produit scalaire, on obtient $\lambda\langle x, x\rangle = 0$, c'est-à-dire $\lambda \| x \|^2 = 0$. Comme x est non nul, on en déduit : $\lambda = 0$.

$$\boxed{0 \text{ est la seule valeur propre réelle possible de } f}$$

Comme l'énoncé admet que *f* possède au moins une valeur propre réelle, alors :

$$\boxed{f \text{ admet } 0 \text{ comme seule valeur propre réelle}}$$

3) a) • Soit x un élément de $\text{Ker}(f)$. On a $f(x)=0$ et grâce à l'antisymétrie de *f*, on obtient : $\forall y \in \mathbb{R}^3,\ 0 = -\langle x, f(y)\rangle$.
Ceci équivaut à dire que x appartient à $\text{Im}(f)^{\perp}$ et on a : $\text{Ker}(f) \subset \text{Im}(f)^{\perp}$.

• Réciproquement, si x appartient à $\text{Im}(f)^{\perp}$, alors :
$\forall y \in \mathbb{R}^3,\ \langle x, f(y)\rangle = 0$. On en déduit : $\forall y \in \mathbb{R}^3,\ -\langle f(x), y\rangle = 0$.
En particulier pour $y = f(x)$, on trouve : $\| f(x)\|^2 = 0$. On a donc $f(x)=0$, ce qui montre que x appartient à $\text{Ker}(f)$ et on a : $\text{Im}(f)^{\perp} \subset \text{Ker}(f)$.
On a donc $\text{Ker}(f) = \text{Im}(f)^{\perp}$ et ainsi :

$$\boxed{\text{Ker}(f) \text{ et } \text{Im}(f) \text{ sont supplémentaires orthogonaux dans } \mathbb{R}^3}$$

Remarque. On pouvait se contenter de montrer une seule inclusion et argumenter sur les dimensions car on a $\dim \text{Ker}(f) = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \text{Im}(f) = \dim \text{Im}(f)^{\perp}$.

4) Si la dimension de $\text{Ker}(f)$ est égale à 3, alors *f* est l'endomorphisme nul et sa matrice dans n'importe quelle base est la matrice nulle. Il existe donc une base dans laquelle la matrice de *f* est de la forme $A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ -\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, avec $\alpha = 0$.

5) a) Comme $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$ sont supplémentaires orthogonaux dans $\mathbb{R}^3$, il existe une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$ faite de la juxtaposition (ou concaténation) d'une base orthonormale de $\text{Im}(f)$ contenant un seul vecteur, noté e_1, puisque $\text{Im}(f)$ est de dimension 1, et d'une base orthonormale de $\text{Ker}(f)$ contenant deux vecteurs, notés e_2 et e_3, puisque $\dim \text{Ker}(f) = 2$.

b) Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. On a $f(e_2) = f(e_3) = 0$ donc :

$$\boxed{\text{La matrice de } f \text{ dans la base } \mathcal{B} \text{ est de la forme : } A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

c) Pour tout y de $\mathbb{R}^3$, donc en particulier pour tout y de $\mathrm{Im}(f)$, $f(y)$ est, par définition, élément de $\mathrm{Im}(f)$ donc :

$$\boxed{\mathrm{Im}(f) \text{ est stable par } f}$$

On en déduit que $f(e_1)$ appartient à $\mathrm{Im}(f)$ et ainsi, il existe un réel k tel que $f(e_1)=ke_1$, ce qui prouve que b et c sont nuls et (en posant $k=a$), la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est de la forme :

$$A=\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

d) On a : $\langle f(e_1), e_1\rangle = \langle ae_1, e_1\rangle = a\| e_1 \|^2$. D'après la première question, on sait que $\langle f(e_1), e_1\rangle = 0$, ce qui prouve que a est nul (puisque le vecteur e_1 est non nul en tant que vecteur de la base $\mathcal{B}$).
La matrice A est donc la matrice nulle, ce qui prouve qu'il est impossible que l'on ait $\dim \mathrm{Ker}(f) = 2$.

6) a) Comme à la question 5a), mais avec $\dim \mathrm{Ker}(f) = 1$ et $\dim \mathrm{Im}(f) = 2$, on peut construire une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$, où (e_1, e_2) est une base orthonormale de $\mathrm{Im} f$ et où e_3 appartient à $\mathrm{Ker}(f)$.

b) Comme $f(e_3)=0$ et comme $\mathrm{Im}(f)$ est stable par f (démonstration déjà faite), $f(e_1)$ et $f(e_2)$ sont combinaisons linéaires de e_1 et e_2, on obtient :

$$\boxed{\text{La matrice de } f \text{ dans la base } \mathcal{B} \text{ est de la forme } A=\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

c) • On sait que $\langle f(e_1), e_1\rangle = 0$ donc $\langle ae_1 + ce_2, e_1\rangle = 0$ et on a, par bilinéarité du produit scalaire :

$$a\| e_1 \|^2 + c\langle e_2, e_1\rangle = 0$$

Comme e_1 et e_2 sont orthogonaux, il reste $a\| e_1 \|^2 = 0$, et comme e_1 n'est pas nul, on obtient $a=0$.

• De même, on sait que $\langle f(e_2), e_2\rangle = 0$ donc $\langle be_1 + de_2, e_2\rangle = 0$ et on a :

$$b\langle e_2, e_1\rangle + d\| e_2 \|^2 = 0$$

Comme e_1 et e_2 sont orthogonaux, il reste $d\|e_2\|^2 = 0$, et comme e_2 n'est pas nul, on obtient $d = 0$.

• On sait aussi que $\langle f(e_1), e_2\rangle = -\langle e_1, f(e_2)\rangle$, ce qui donne, compte tenu du fait que a et d sont nuls : $\langle ce_2, e_2\rangle = -\langle e_1, be_1\rangle$.

On a donc : $c\|e_2\|^2 = -b\|e_1\|^2$ et comme e_1 et e_2 sont normés, il reste $c = -b$.

d) En posant $b = \alpha$, on constate que :

La matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est de la forme $A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ -\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 3 ....

1) Comme on sait simuler une variable aléatoire suivant une loi exponentielle à l'aide de `grand`, on peut proposer :

```
X=grand(1,1,'exp',2)
Y=sqrt(X)
```

2) a) • La variable X prenant ses valeurs dans $\mathbb{R}_+$, Y est bien définie et Y prend aussi ses valeurs dans $\mathbb{R}_+$, donc, d'ores et déjà : $\forall x < 0,\ F_Y(x) = 0$.

• Pour tout réel x positif ou nul, on a :

$$F_Y(x) = P(Y \leq x) = P\left(\sqrt{X} \leq x\right)$$

Comme la fonction $t \mapsto t^2$ est une bijection croissante de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$, on obtient, en notant F_X la fonction de répartition de X :

$$F_Y(x) = P(X \leq x^2) = F_X(x^2)$$

Comme X suit la loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{2}$ et comme $x^2 \geq 0$, on a :

$$\forall x \geq 0,\ F_Y(x) = 1 - e^{-x^2/2}$$

Bilan :

$$\boxed{F_Y(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x^2/2} \text{ si } x \geq 0 \\ 0 \text{ si } x < 0 \end{cases}}$$

b) On dérive $F_Y(x)$ sauf en 0, ce qui donne : $f_Y(x) = \begin{cases} xe^{-x^2/2} \text{ si } x > 0 \\ 0 \text{ si } x < 0 \end{cases}$.

En posant $f_Y(0)=0$, on obtient une densité de Y définie par :

$$\boxed{f_Y(x)=\begin{cases} xe^{-x^2/2} \text{ si } x\geq 0 \\ 0 \text{ si } x<0 \end{cases}}$$

3) a) Comme Z suit la loi normale centrée réduite, on a : $V(Z)=1$ et $E(Z)=0$. Par conséquent, grâce à la formule de Koenig-Huygens, on obtient :

$$\boxed{E(Z^2)=1}$$

b) • On a déjà $\int_{-\infty}^{0} x f_Y(x)\,dx=0$ (sans aucun problème de convergence puisque f_Y est nulle sur $\mathbb{R}_-^*$).

• Pour tout réel x positif ou nul, on a : $x f_Y(x)=x^2 e^{-x^2/2}$

Or on sait que si Z suit la loi normale centrée réduite, alors $E(Z^2)=1$, ce qui s'écrit :

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}x^2 e^{-x^2/2}dx=1$$

Par conséquent, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty}x^2 e^{-x^2/2}dx$ converge et est égale à $\sqrt{2\pi}$. Comme $x\mapsto x^2 e^{-x^2/2}$ est paire, on en déduit :

$$\int_{0}^{+\infty}x^2 e^{-x^2/2}dx=\frac{1}{2}\sqrt{2\pi}$$

Ceci s'écrit aussi $\int_{0}^{+\infty}x f_Y(x)\,dx=\frac{1}{2}\sqrt{2\pi}$, et comme $\int_{-\infty}^{0}x f_Y(x)\,dx=0$, on obtient $\int_{-\infty}^{+\infty}x f_Y(x)\,dx=\frac{1}{2}\sqrt{2\pi}$ ce qui veut exactement dire que Y a une espérance avec de plus :

$$\boxed{E(Y)=\frac{\sqrt{2\pi}}{2}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}}$$

4) a) Comme $-\frac{X}{2}$ prend des valeurs négatives, $e^{-X/2}$ prend des valeurs inférieures ou égales à 1. Comme de plus, la fonction exponentielle prend des valeurs strictement positives, $e^{-X/2}$ prend ses valeurs dans $]0,1]$, ce qui fait que $-e^{-X/2}$ prend ses valeurs dans $[-1,0[$.

En ajoutant 1, on voit que $U=1-e^{-X/2}$ prend ses valeurs dans $[0,1[$.

On a bien :

$$\boxed{U(\Omega)=[0,1[}$$

b) D'après la question précédente, on a déjà : $F_U(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ 1 \text{ si } x \geq 1 \end{cases}$.

Pour tout x de $[0,1[$, on a :

$$F_U(x) = P(U \leq x) = P\left(1 - e^{-X/2} \leq x\right) = P\left(e^{-X/2} \geq 1 - x\right)$$

Comme $1 - x > 0$ et comme la fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, on en déduit :

$$\forall x \in [0,1[,\ F_U(x) = P\left(-\frac{X}{2} \geq \ln(1-x)\right) = P(X \leq -2\ln(1-x))$$

On sait que $F_X(z) = \begin{cases} 1 - e^{-z/2} \text{ si } z \geq 0 \\ 0 \text{ si } z < 0 \end{cases}$ donc on obtient finalement :

$$\forall x \in [0,1[,\ F_U(x) = 1 - e^{-\frac{-2\ln(1-x)}{2}} = 1 - e^{\ln(1-x)} = 1 - (1-x) = x$$

Bilan :

$$\boxed{F_U(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ x \text{ si } 0 \leq x < 1 \\ 1 \text{ si } x \geq 1 \end{cases}}$$

On reconnaît que :

$$\boxed{U \text{ suit la loi uniforme sur } [0,1[}$$

c) On a $U = 1 - e^{-X/2}$ donc $1 - U = e^{-X/2}$, puis $\ln(1-U) = -\frac{X}{2}$ et enfin :

$$\boxed{X = -2\ln(1-U)}$$

Comme U suit la loi uniforme sur $[0,1[$ que l'on simule avec `rand()`, et comme $Y = \sqrt{X}$, on peut proposer :

```
U=rand()
X=-2*log(1-U)
Y=sqrt(X)
```

Problème ....

1) a) Par définition, $p_0(0) = P(N_0 = 0)$ et comme il est certain qu'il n'y aura aucun appel dans l'intervalle de temps [0, 0], on a :

$$\boxed{p_0(0) = 1}$$

Le même argument montre que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ p_n(0) = 0}$$

Conclusion : la variable N_0 est la variable quasi-certaine égale à 0.

2) a) La fonction f_0 définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f_0(t)=p_0(t)e^{\lambda t}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et on a : $f_0'(t)=\left(\lambda p_0(t)+p_0'(t)\right)e^{\lambda t}$. D'après l'énoncé, on en déduit :

$$\forall t\in\mathbb{R}_+,\ f_0'(t)=0$$

Ceci prouve que f_0 est constante sur $\mathbb{R}_+$: $\exists k\in\mathbb{R}$, $\forall t\in\mathbb{R}_+,\ f_0(t)=k$.

D'après la première question, on sait que $p_0(0)=1$, on a donc $f_0(0)=p_0(0)e^{\lambda\times 0}=1$, ce qui prouve que $k=1$ et, par conséquent :

$$\boxed{\forall t\geq 0,\ f_0(t)=1}$$

b) On a, pour tout réel *t* positif : $f_n(t)=e^{\lambda t}p_n(t)$.

Par conséquent : $f_n'(t)=\lambda e^{\lambda t}p_n(t)+e^{\lambda t}p_n'(t)=e^{\lambda t}\left(\lambda p_n(t)+p_n'(t)\right)$.

D'après l'énoncé, on sait que $p_n'(t)=-\lambda p_n(t)+\lambda p_{n-1}(t)$ donc :

$$f_n'(t)=e^{\lambda t}\left(\lambda p_n(t)-\lambda p_n(t)+\lambda p_{n-1}(t)\right)=\lambda p_{n-1}(t)e^{\lambda t}$$

On trouve ainsi :

$$\boxed{f_n'(t)=\lambda f_{n-1}(t)}$$

c) i) Comme on a supposé que $f_{n-1}(t)=\dfrac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}$, on obtient :

$$f_n'(t)=\lambda\times\frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}=\frac{\lambda^n}{(n-1)!}t^{n-1}$$

En primitivant, on en déduit qu'il existe une constante K telle que :

$$f_n(t)=\frac{\lambda^n}{(n-1)!}\times\frac{t^n}{n}+K=\frac{(\lambda t)^n}{n!}+K$$

ii) D'après la première question, on sait que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a $p_n(0)=0$ donc $f_n(0)=e^{\lambda\times 0}p_n(0)=p_n(0)=0$ et, d'après l'expression ci-dessus, en donnant à *t* la valeur 0, on obtient : $0=K$. On en déduit :

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \forall t\geq 0,\ f_n(t)=\frac{(\lambda t)^n}{n!}}$$

3) a) La question 2) a consisté à montrer par récurrence (la question 2a) étant l'initialisation et la question 2b) l'hérédité) que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \geq 0,\ f_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!}}$$

Comme $p_n(t) = e^{-\lambda t} f_n(t)$, on en déduit :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \geq 0,\ p_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}}$$

b) En revenant à la définition de $p_n(t)$, on obtient, pour tout entier naturel *n*,

$$P(N_t = n) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}$$

Comme $\lambda t > 0$, ceci prouve que :

$$\boxed{N_t \text{ suit la loi de Poisson de paramètre } \lambda t}$$

4) a) L'événement $(S_1 > t)$ est réalisé si, et seulement si, le premier appel survient strictement après l'instant *t*, ce qui signifie qu'il n'y a eu aucun appel dans l'intervalle de temps $[0, t]$. En d'autres termes, on a :

$$\boxed{(S_1 > t) = (N_t = 0)}$$

On en déduit, en passant aux probabilités :

$$\forall t \geq 0,\ P(S_1 > t) = P(N_t = 0) = e^{-\lambda t}$$

En notant F_{S_1} la fonction de répartition de S_1, on a :

$$\forall t \geq 0,\ F_{S_1}(t) = P(S_1 \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

Comme de plus, $F_{S_1}(t) = 0$ si *t* est strictement négatif, on conclut :

$$\boxed{S_1 \text{ suit la loi exponentielle de paramètre } \lambda}$$

b) L'événement $(S_n > t)$ est réalisé si, et seulement si, le $n^{\text{ème}}$ appel survient strictement après l'instant *t*, ce qui signifie qu'il y a eu au maximum $n-1$ appels dans l'intervalle de temps $[0, t]$.

On a donc :

$$\boxed{(S_n > t) = (N_t \leq n-1)}$$

c) On en déduit : $P(S_n > t) = P(N_t \leq n-1) = \sum_{i=0}^{n-1} P(N_t = i)$.

En remplaçant les probabilités, on obtient :

$$P(S_n > t) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^i}{i!} e^{-\lambda t}$$

En notant F_n la fonction de répartition de S_n, on a :

$$F_n(t) = \begin{cases} 1 - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^i}{i!} e^{-\lambda t} \text{ si } t \geq 0 \\ 0 \text{ si } t < 0 \end{cases}$$

• La fonction F_n est continue sur $\mathbb{R}$ (elle est constante sur $\mathbb{R}_-^*$, c'est une somme de fonctions continues sur $\mathbb{R}_+^*$ et de plus, on a, d'une part $\lim_{t \to 0^-} F_n(t) = \lim_{t \to 0^-} 0 = 0$ et, d'autre part :

$$\lim_{t \to 0+} F_n(t) = 1 - \lim_{t \to 0^+} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^i}{i!} e^{-\lambda t} = 1 - \lim_{t \to 0^+} e^{-\lambda t} \left(1 + \lambda t + \ldots + \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}\right) = 0$$

• La fonction F_n est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$ (elle est constante sur $\mathbb{R}_-^*$ et c'est une somme de fonctions continues sur $\mathbb{R}_+^*$).

Conclusion :

$$\boxed{S_n \text{ est une variable à densité}}$$

En dérivant F_n sauf en 0, on trouve :

$$F_n'(t) = \begin{cases} \lambda \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^i}{i!} e^{-\lambda t} - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\lambda i (\lambda t)^{i-1}}{i!} e^{-\lambda t} \text{ si } t > 0 \\ 0 \text{ si } t < 0 \end{cases}$$

Le terme numéro 0 de la deuxième somme est nul et en simplifiant, on obtient :

$$F_n'(t) = \begin{cases} \lambda \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^i}{i!} e^{-\lambda t} - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\lambda (\lambda t)^{i-1}}{(i-1)!} e^{-\lambda t} \text{ si } t > 0 \\ 0 \text{ si } t < 0 \end{cases}$$

En changeant d'indice, toujours dans la deuxième somme, on a :

$$F_n'(t) = \begin{cases} \lambda \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^i}{i!} e^{-\lambda t} - \lambda \sum_{i=0}^{n-2} \frac{(\lambda t)^i}{i!} e^{-\lambda t} \text{ si } t > 0 \\ 0 \text{ si } t < 0 \end{cases}$$

Les deux sommes se simplifient et il ne reste que le terme numéro $n-1$ de la première :

$$F_n'(t) = \begin{cases} \lambda \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t} \text{ si } t > 0 \\ 0 \text{ si } t < 0 \end{cases}$$

En regroupant, on a finalement :

$$F_n'(t) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^n t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t} \text{ si } t > 0 \\ 0 \text{ si } t < 0 \end{cases}$$

On obtient une densité f_n de S_n en posant par exemple $f_n(0) = 0$, ce qui donne :

$$f_n(t) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^n t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t} \text{ si } t > 0 \\ 0 \text{ si } t \leq 0 \end{cases}$$

5) a) D'après l'énoncé, le nombre d'appels N_u reçus entre les instants 0 et u est indépendant du nombre d'appels $N_t - N_u$ reçus entre les instants u et t donc :

$$\boxed{N_u \text{ et } N_t - N_u \text{ sont indépendantes}}$$

b) Avec le système complet d'événements $(N_u = i)_{i \in \mathbb{N}}$, la formule des probabilités totales s'écrit :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ P(N_t = n) = \sum_{i=0}^{+\infty} P([N_u = i] \cap [N_t = n])$$

Comme $u < t$ le nombre d'appels reçus dans l'intervalle $[0, t]$ ne peut pas être supérieur au nombre d'appels reçus dans l'intervalle $[0, t]$ donc :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ P(N_t = n) = \sum_{i=0}^{n} P([N_u = i] \cap [N_t = n])$$

On en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ P(N_t = n) = \sum_{i=0}^{n} P([N_u = i] \cap [N_t - N_u = n - i])$$

Par indépendance de N_u et $N_t - N_u$, on obtient :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ P(N_t = n) = \sum_{i=0}^{n} P(N_u = i) P(N_t - N_u = n - i)}$$

c) • En donnant à n la valeur 0, on obtient :

$$P(N_t = 0) = P(N_u = 0) P(N_t - N_u = 0)$$

On connaît les lois de N_t et N_u et en remplaçant, on trouve :

$$e^{-\lambda t} = e^{-\lambda u} P(N_t - N_u = 0)$$

On a donc :

$$\boxed{P(N_t - N_u = 0) = e^{-\lambda(t-u)}}$$

• En donnant à n la valeur 1, on obtient :

$$P(N_t=1)=P(N_u=0)P(N_t-N_u=1)+P(N_u=1)P(N_t-N_u=0)$$

En remplaçant, on trouve :

$$\lambda t e^{-\lambda t}=\lambda u e^{-\lambda u}e^{-\lambda(t-u)}+e^{-\lambda u}P(N_t-N_u=1)$$

En arrangeant un peu, on trouve : $\lambda(t-u)e^{-\lambda t}=e^{-\lambda u}P(N_t-N_u=1)$

On a enfin :

$$\boxed{P(N_t-N_u=1)=\lambda(t-u)e^{-\lambda(t-u)}}$$

d) On procède par récurrence forte.

• Pour $n=0$, l'initialisation est déjà faite.

• Supposons, pour un entier naturel n fixé non nul que, pour tout k de $[\![0,n-1]\!]$, on ait : $P(N_t-N_u=k)=\dfrac{\left[\lambda(t-u)\right]^k}{k!}e^{-\lambda(t-u)}$.

D'après la question 5b), on peut écrire :

$$P(N_t=n)=\sum_{i=0}^{n}P(N_u=i)P(N_t-N_u=n-i)$$

En isolant le terme d'indice 0, on trouve :

$$P(N_t=n)=P(N_u=0)P(N_t-N_u=n)+\sum_{i=1}^{n}P(N_u=i)P(N_t-N_u=n-i)$$

On peut appliquer l'hypothèse de récurrence à tous les termes de la somme et remplacer les probabilités connues (concernant les lois de N_u et N_t) et on trouve :

$$\frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t}=e^{-\lambda u}\times P(N_t-N_u=n)+\sum_{i=1}^{n}\frac{(\lambda u)^i}{i!}e^{-\lambda u}\times\frac{\left[\lambda(t-u)\right]^{n-i}}{(n-i)!}e^{-\lambda(t-u)}$$

En multipliant par $e^{\lambda u}$ de chaque côté, on obtient :

$$\frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda(t-u)}=P(N_t-N_u=n)+e^{-\lambda(t-u)}\sum_{i=1}^{n}\frac{(\lambda u)^i}{i!}\times\frac{\left[\lambda(t-u)\right]^{n-i}}{(n-i)!}$$

Il reste à faire apparaître un coefficient binomial dans la somme, ce qui donne :

$$\frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda(t-u)}=P(N_t-N_u=n)+\frac{e^{-\lambda(t-u)}}{n!}\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}(\lambda u)^i\left[\lambda(t-u)\right]^{n-i}$$

En ajoutant et enlevant le terme d'indice 0 dans la somme, on a alors :

$$\frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda(t-u)}=P(N_t-N_u=n)+\frac{e^{-\lambda(t-u)}}{n!}\left(\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(\lambda u)^i\left[\lambda(t-u)\right]^{n-i}-\left[\lambda(t-u)\right]^n\right)$$

Grâce à la formule du binôme, on trouve :

$$\frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda(t-u)}=P(N_t-N_u=n)+\frac{e^{-\lambda(t-u)}}{n!}\left((\lambda t)^n-\left[\lambda(t-u)\right]^n\right)$$

Les termes $\dfrac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda(t-u)}$ se simplifient et il reste :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ P\left(N_t - N_u = n\right) = \frac{\left[\lambda\left(t-u\right)\right]^n}{n!}e^{-\lambda(t-u)}}$$

6) a) Par définition, R_t est la variable aléatoire égale à l'instant où survient le N_t-ième appel, ce qui veut dire que :

$$\boxed{R_t \text{ est l'instant où survient le dernier appel avant l'instant } t}$$

b) Avec le système complet d'événements $\left(N_t = n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ la formule des probabilités totales s'écrit : $P\left(R_t > u\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P\left(\left[R_t > u\right] \cap \left[N_t = n\right]\right)$.

• Pour $n = 0$, on a $\left[R_t > u\right] \cap \left[N_t = 0\right] = \varnothing$, car, d'après l'énoncé, si N_t prend la valeur 0, R_t prend aussi la valeur 0 donc $\left[R_t > u\right]$ ne peut pas être réalisé.

Ainsi, il reste :

$$P\left(R_t > u\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} P\left(\left[R_t > u\right] \cap \left[N_t = n\right]\right)$$

• D'autre part, pour $n \geq 1$, on a :

$\left[R_t > u\right] \cap \left[N_t = n\right] = \left[S_{N_t} > u\right] \cap \left[N_t = n\right] = \left[S_n > u\right] \cap \left[N_t = n\right]$

On trouve alors :

$$\boxed{\forall t > 0,\ \forall u \in [0, t],\ P\left(R_t > u\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} P\left(\left[S_n > u\right] \cap \left[N_t = n\right]\right)}$$

c) D'après la question 4b), on a :

$$P\left(\left[S_n > u\right] \cap \left[N_t = n\right]\right) = P\left(\left[N_u \leq n-1\right] \cap \left[N_t = n\right]\right) = \sum_{i=0}^{n-1} P\left(\left[N_t = n\right] \cap \left[N_u = i\right]\right)$$

On en déduit :

$$P\left(\left[S_n > u\right] \cap \left[N_t = n\right]\right) = \sum_{i=0}^{n-1} P\left(\left[N_t - N_u = n-i\right] \cap \left[N_u = i\right]\right)$$

En injectant ceci dans l'égalité donnant $P\left(R_t > u\right)$, on obtient :

$$\boxed{\forall t > 0,\ \forall u \in [0, t],\ P\left(R_t > u\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{i=0}^{n-1} P\left(\left[N_u = i\right] \cap \left[N_t - N_u = n-i\right]\right)}$$

d) Par indépendance de $N_t - N_u$ et N_u, on a :

$$\forall t > 0,\ \forall u \in [0,\, t],\ P(R_t > u) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{i=0}^{n-1} P(N_u = i) P(N_t - N_u = n-i)$$

En remplaçant les probabilités par leur valeur, on obtient :

$$\forall t > 0,\ \forall u \in [0,\, t],\ P(R_t > u) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\lambda u)^i}{i!} e^{-\lambda u} \times \frac{[\lambda(t-u)]^{n-i}}{(n-i)!} e^{-\lambda(t-u)}$$

En simplifiant un peu, on trouve :

$$\forall t > 0,\ \forall u \in [0,\, t],\ P(R_t > u) = e^{-\lambda t} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} (\lambda u)^i [\lambda(t-u)]^{n-i}$$

On ajoute et on retire le terme numéro n dans la somme :

$$\forall t > 0,\ \forall u \in [0,\, t],\ P(R_t > u) = e^{-\lambda t} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (\lambda u)^i [\lambda(t-u)]^{n-i} - (\lambda u)^n \right)$$

Avec la formule du binôme, on obtient :

$$\forall t > 0,\ \forall u \in [0,\, t],\ P(R_t > u) = e^{-\lambda t} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} \left((\lambda t)^n - (\lambda u)^n \right)$$

Comme $\frac{1}{0!}\left((\lambda t)^0 - (\lambda u)^0\right) = 0$, on peut écrire :

$$\forall t > 0,\ \forall u \in [0,\, t],\ P(R_t > u) = e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \left((\lambda t)^n - (\lambda u)^n \right)$$

On reconnaît deux séries exponentielles convergentes, ce qui donne :

$$\forall t > 0,\ \forall u \in [0,\, t],\ P(R_t > u) = e^{-\lambda t} \left(e^{\lambda t} - e^{\lambda u} \right) = 1 - e^{-\lambda(t-u)}$$

On a donc :

$$\forall t > 0,\ \forall u \in [0,\, t],\ F_t(u) = e^{-\lambda(t-u)}$$

En notant que F_t est nulle sur $\mathbb{R}_-^*$ et est égale à 1 sur $]t, +\infty[$, on a enfin :

$$\boxed{F_t(u) = \begin{cases} 0 \text{ si } u < 0 \\ e^{-\lambda(t-u)} \text{ si } 0 \le u \le t \\ 1 \text{ si } u > t \end{cases}}$$

e) R_t n'est pas une variable à densité puisque F_t n'est pas continue sur $\mathbb{R}$ (problème de continuité en 0).

R_t n'est pas non plus une variable discrète puisque son support est $[0,\, t]$.

Concours d'admission sur classes préparatoires
Option scientifique

RAPPORT DU JURY
ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES
2018

Présentation de l'épreuve :

- L'épreuve comportait, comme d'habitude, trois exercices et un problème, ce qui permettait de juger les candidats sur une partie conséquente du programme des classes préparatoires.
- Le sujet balayait largement le programme en donnant, encore une fois, une place importante aux probabilités.

La diversité des thèmes abordés a permis à tous les candidats de s'exprimer et de montrer leurs compétences, ne serait-ce que sur une partie du programme.

- Seulement un exercice comportait deux questions d'informatique.
- Dans l'ensemble, les correcteurs ont trouvé le sujet bien adapté au public concerné, mais comportant, malgré tout, quelques questions particulièrement difficiles (dans le problème notamment) où seuls les bons candidats ont pu tirer leur épingle du jeu en montrant leur capacité à mener un calcul compliqué à son terme ainsi que leur faculté à raisonner sur des situations abstraites.

Description du sujet :

L'exercice 1 proposait l'étude de l'équation $f_n(x)=0$, où la fonction f_n était définie sur $\mathbb{R}_+$, par :

$$f_n(x)=1-x-x^n$$

La suite (u_n) des solutions de cette équation faisait l'objet d'une étude asymptotique qui visait à déterminer la nature des séries de termes généraux $1-u_n$ et $(1-u_n)^2$.

Cet exercice, portant sur le programme de première année a révélé quelques failles chez un grand nombre de candidats, ce qui a désagréablement surpris les correcteurs.

L'exercice 2, portait sur les parties d'algèbre linéaire et d'algèbre bilinéaire du programme. Il s'agissait de démontrer que, tout endomorphisme antisymétrique f de $\mathbb{R}^3$ avait une matrice de la forme :

$$A=\begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ -\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ avec } \alpha \text{ réel}$$

Cet exercice a souvent été le moins abordé et le moins bien réussi, nombre de candidats faisant un contresens dès le départ.

L'exercice 3 portant sur le programme de probabilités, proposait l'étude de la racine carrée d'une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre 1/2.
On se proposait de simuler de deux façons une telle variable, une première avec `grand` et une deuxième avec `rand`.
Cet exercice a été abordé avec des fortunes diverses, mais c'est globalement le mieux réussi, car il ne contenait pas de questions déstabilisantes.

Le problème, portant lui aussi sur le programme de probabilités, proposait l'étude d'un "processus de Poisson" : les appels parvenant à un central téléphonique arrivent de façon indépendante au central, et le nombre d'appels reçus par le central pendant un certain intervalle de temps est indépendant du nombre d'appels reçus par le central pendant un intervalle de temps disjoint du précédent.

Pour tout réel t positif, on déterminait la loi de la variable aléatoire N_t égale au nombre d'appels reçus par le central pendant l'intervalle de temps $[0,t]$ sous les hypothèses :

$$\forall t \geq 0\,,\ \begin{cases} p_0'(t) = -\lambda p_0(t) \\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ p_n'(t) = -\lambda p_n(t) + \lambda p_{n-1}(t) \end{cases}$$

Où l'on avait posé $p_n(t) = P(N_t = n)$. On cherchait à la fin la loi de la variable égale à l'instant où survient le dernier appel avant l'instant t.
La plupart des candidats ont abordé le problème, avec une certaine réussite, du moins dans les premières questions, mais la suite, technique et théorique a eu raison de la majorité d'entre eux, de très nombreux candidats ayant été rapidement submergés par les calculs quand ils n'étaient pas pris de court sur le sens à donner aux questions posées.

Statistiques :

• Pour l'ensemble des 3799 candidats ayant composé, la moyenne obtenue à cette épreuve est égale à 11,496 sur 20 (supérieure de 0,15 point à celle de l'année dernière) et l'écart type vaut 5,686 (sensiblement égal à celui de l'année dernière, et toujours important).

• 30,7% des candidats, contre 31,8% l'année dernière, ont une note strictement inférieure à 8 (parmi eux, 11,08% ont une note inférieure à 4).

• 21,3% des candidats ont une note comprise entre 8 et 12 (pourcentage très légèrement inférieur à celui de 2017 qui était de 22,3%).

• 26,4% des candidats ont une note supérieure ou égale à 16 (pourcentage très légèrement supérieur à celui de 2017 qui était de 26,16%).

Conclusion :

Comme l'an dernier, le niveau est très hétérogène et l'impression générale ressentie à la lecture des copies amène à penser que les questions les plus subtiles, qui demandent une compréhension fine de la théorie, quel que soit le domaine concerné, échappent à presque tous les candidats. Les meilleurs ont acquis des techniques et des réflexes mais ne comprennent pas forcément en profondeur ce qu'ils font.
Les copies sont, dans l'ensemble, bien présentées et bien rédigées mais il reste, en assez grand nombre, des candidats qui rendent pratiquement un brouillon, proposent des copies sales et raturées, parfois sans les numéros des questions traitées ou avec des numéros fantaisistes, et truffent leur copie d'abréviations non officielles.
Les correcteurs sont de plus en plus nombreux à s'élever contre une rédaction trop relâchée et ils n'ont, comme d'habitude, aucune compassion pour ces candidats qui bien évidemment s'exposent à des sanctions.

Un nombre non négligeable de candidats restent adeptes des réponses floues : il faut savoir que ce type de réponse est sanctionné et que l'absence d'argument ou le manque de précision rend la réponse irrecevable.
La mauvaise maîtrise des techniques de base et des calculs élémentaires reste une constante et semble même s'aggraver pour un nombre non négligeable de candidats. Il serait bien que les futurs candidats investissent un peu de leur temps sur ces deux points et n'oublient pas qu'une épreuve de concours valide deux années d'étude : il faut donc garder en tête les connaissances de première année (exercice 1 de cette session).

Rappelons, une fois encore, que l'honnêteté, la simplicité, la précision et la rigueur sont des vertus attendues par tous les correcteurs sans exception, et qu'une bonne réponse est toujours une réponse construite rigoureusement.