Concours d'admission sur classes préparatoires
Option ECS

RAPPORT DU JURY
ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES
2022

Présentation de l'épreuve :

• L'épreuve comportait, comme d'habitude, trois exercices et un problème, ce qui permettait de juger les candidats sur une partie conséquente du programme des classes préparatoires.

• Le sujet balayait largement le programme et la diversité des thèmes abordés a permis à tous les candidats de s'exprimer et de montrer leurs compétences, ne serait-ce que sur une partie du programme.

• Des questions d'informatique étaient proposées dans l'exercice 2, l'exercice 3 et le problème.

• Dans l'ensemble, les correcteurs ont trouvé le sujet bien adapté au public concerné, avec toujours quelques questions particulièrement difficiles : fin de l'exercice 1 (convergence en loi de deux suites de variables aléatoires), exercice 2 (questions difficiles portant sur le programme d'algèbre bilinéaire), début de l'exercice 3 (existence de l'espérance d'une variable aléatoire définie comme une somme aléatoire de variables aléatoires) où seuls les très bons candidats ont pu tirer leur épingle du jeu en montrant, d'une part leur capacité à mener un calcul compliqué à son terme, et d'autre part leur faculté à raisonner sur des situations abstraites. Le problème a été jugé facile par tous les correcteurs mais il a pourtant donné lieu à d'énormes erreurs de calcul, de dérivation, et même d'interprétation erronée de questions pourtant simples.

Description du sujet :

L'exercice 1 proposait de montrer que, si la fonction *f* est une densité strictement positive et continue sur $\mathbb{R}$ d'une variable aléatoire *X*, dont la fonction de répartition est *F*, alors la fonction *g* définie par $g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{F(a)} & \text{si } x\le a\\ 0 & \text{si } x>a\end{cases}$, est aussi une densité d'une certaine variable aléatoire *Y*.

On se donnait ensuite une suite de variables $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ mutuellement indépendantes, et suivant toutes la même loi que *Y*, l'objectif étant alors d'établir deux convergences en loi : celle de la suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $M_n=\max(Y_1,\dots,Y_n)$ vers une variable certaine égale à *a*, et celle de la suite $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, où $Z_n=n(a-M_n)$ vers une variable exponentielle de paramètre $\dfrac{f(a)}{F(a)}$.

Les résultats obtenus à cet exercice ont déçu les correcteurs, de par la présence de beaucoup d'incohérences dans les réponses de nombreux candidats (par exemple, des « fonctions de répartition » qui n'en sont pas).

L'exercice 2, portant sur le programme d'algèbre linéaire et d'algèbre bilinéaire, étudiait, au travers de deux exemples, l'ensemble F des endomorphismes f de $\mathbb{R}^3$ tels qu'il existe un réel k de $[0,1[$ pour lequel on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^3,\ \| f(x) \| \leq k \| x \|$$

Cet exercice est globalement le moins bien réussi, car la plupart des questions, très abstraites, ont déstabilisé bon nombre de candidats dont les connaissances en algèbre linéaire et en algèbre bilinéaire sont véritablement fragiles... Il est à noter que les parties faciles ont été littéralement sabordées par de nombreux candidats ne maîtrisant pas les tables de multiplication et ne pouvant, par exemple, pas reconnaître que 27 et 81 sont dans la « table du 9 », ce qui les handicapait pour la suite.

L'exercice 3 portait sur la partie probabilités discrètes du programme et avait pour objectif d'étudier la variable aléatoire S définie par $S = \sum_{i=1}^{N} X_i$, où la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes et suivant toutes la même loi qu'une variable X suivant la loi de Bernoulli de paramètre p, et où N désigne une variable aléatoire telle que $N(\Omega) = \mathbb{N}^*$, indépendante des variables X_i .
Sur l'exemple où $N-1$ suit la loi de Poisson de paramètre λ, on vérifiait l'égalité de Wald $E(S) = E(X)E(N)$ donnant l'espérance de S.
Cet exercice a été diversement apprécié des candidats qui ont souvent été dépassés par le concept abordé à travers la variable aléatoire S, mais aussi, pour certains, empêtrés dans des calculs autour de la série exponentielle qui n'ont pas abouti.

Le problème, portait sur le programme d'analyse. On y étudiait les fonctions sh , ch et th définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\text{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2},\ \text{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \text{ et } \text{th}(x) = \frac{\text{sh}(x)}{\text{ch}(x)}$$

La dernière partie permettait d'établir l'équivalent suivant :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\text{sh}(nx)} \underset{x\to 0^+}{\sim} -\frac{\ln x}{x}$$

Le problème a été abordé par de nombreux candidats qui ont su, pour pas mal d'entre eux, y trouver leur bonheur car ils étaient en terrain de connaissance : un problème d'analyse classique avec seulement deux ou trois questions vraiment difficiles.

Statistiques :

• Pour l'ensemble des 3668 candidats ayant composé, la moyenne obtenue à cette épreuve est égale à 11 sur 20 (presque la même que l'année dernière). La médiane est égale à 10,8 et l'écart type vaut 5,88 (toujours important et signe d'un classement efficace des candidats).

• 35,5% des candidats, contre 34,5% l'année dernière, ont une note inférieure ou égale à 8 (parmi eux, 14,2% ont une note inférieure à 4, pourcentage un peu inférieur à celui de l'année dernière).

• 21,6% des candidats ont une note comprise entre 8 et 12 (pourcentage un peu supérieur à celui de l'année dernière qui était de 20,2%).

• 25,5% des candidats ont une note supérieure ou égale à 16 (pourcentage inférieur à celui de l'année dernière qui était de 27,6%).

Conclusion :

Comme l'an dernier, le niveau est très hétérogène et il y a un peu plus de candidats en difficulté, tendance qui s'était déjà amorcée entre 2020 et 2021, et aussi un peu moins de très bons candidats qu'en 2021.

Sur la forme, les copies sont, dans l'ensemble, bien présentées et bien rédigées mais il reste quelques candidats qui rendent pratiquement un brouillon, proposent des copies sales et raturées, parfois sans les numéros des questions traitées, notamment lors d'allers-retours sur certaines questions. Les correcteurs remarquent que les candidats sont majoritairement honnêtes (peu d'entre eux truandent et on a observé très peu de tours de passe-passe). Pour finir, la qualité de l'orthographe semble toujours être une option (pas forcément choisie par certains candidats)… Certains correcteurs proposent de revenir à un bonus pour les copies agréables à lire ou à un malus pour les copies sales donc, d'une certaine façon, peu respectueuses du correcteur.

Sur le fond, les membres du jury signalent qu'un nombre trop important de candidats ne maîtrisent pas les notions de base du programme (fonction de répartition, diagonalisation, obtention d'un équivalent par encadrement, existence d'une espérance par domination, etc.) ou manquent de recul sur leurs résultats (probabilités négatives ou plus grandes que 1), ou bien oublient les hypothèses et justifications qu'il faut donner, y compris pour des questions élémentaires (vérifier la dérivabilité avant de dériver, la continuité des fonctions que l'on intègre avant d'intégrer, préciser le signe d'une quantité par laquelle on multiplie une inégalité, donner les variations des fonctions que l'on applique sur une inégalité, etc.) voire même commettent de graves fautes de calcul (dérivées fausses dans le problème), le plus frappant cette année étant l'incapacité d'un très grand nombre de candidats à mener des calculs élémentaires (simplifier des fractions par exemple) ce que certains correcteurs qualifient de honteux, mais peut-être est-ce l'air du temps !...

Rappelons, une fois encore, que la simplicité, la précision et la rigueur sont des vertus attendues par tous les correcteurs sans exception, et qu'une bonne réponse est toujours une réponse construite rigoureusement.

Conseil aux futurs candidats : il faut prendre le temps de lire correctement chaque question et d'en comprendre les enjeux avant de se lancer dans une résolution aventureuse menant à une réponse incomplète, voire complètement hors-sujet.
Dans la pratique, il ne faut pas rester plus de 4 ou 5 minutes sur une question, sauf pour terminer un long calcul.