

**Conception : EDHEC**

OPTION ÉCONOMIQUE

**MATHÉMATIQUES**

2 mai 2017, de 8 h. à 12 h.

*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

*Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*

*Ils ne doivent faire usage d'aucun document. **L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.** Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*

*Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.*

---

**Exercice 1**

On considère la fonction  $f$  qui à tout couple  $(x, y)$  de  $\mathbb{R}^2$  associe le réel :

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2$$

1) Justifier que  $f$  est de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}^2$ .

2) a) Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de  $f$ .

b) Montrer que le gradient de  $f$  est nul si, et seulement si, on a : 
$$\begin{cases} x^3 - x + y = 0 \\ y^3 + x - y = 0 \end{cases}$$

c) En déduire que  $f$  possède trois points critiques :  $(0, 0)$ ,  $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$  et  $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ .

3) a) Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de  $f$ .

b) Écrire la matrice hessienne de  $f$  en chaque point critique.

c) Déterminer les valeurs propres de chacune de ces trois matrices puis montrer que  $f$  admet un minimum local en deux de ses points critiques. Donner la valeur de ce minimum.

d) Déterminer les signes de  $f(x, x)$  et  $f(x, -x)$  au voisinage de  $x = 0$ . Conclure quant à l'existence d'un extremum en le troisième point critique de  $f$ .

4) a) Pour tout  $(x, y)$  de  $\mathbb{R}^2$ , calculer  $f(x, y) - (x^2 - 2)^2 - (y^2 - 2) - 2(x + y)^2$ .

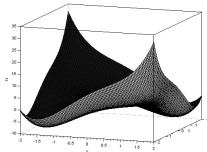
b) Que peut-on déduire de ce calcul quant au minimum de  $f$ ?

5) a) Compléter la deuxième ligne du script suivant afin de définir la fonction  $f$ .

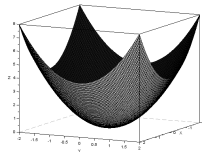
```

function z=f(x,y)
z = -----
endfunction
x=linspace(-2,2,101)
y=x
fplot3d(x,y,f)
    
```

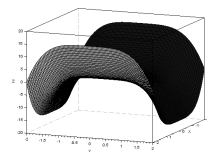
b) Le script précédent, une fois complété, renvoie l'une des trois nappes suivantes. Laquelle ? Justifier la réponse.



Nappe 1



Nappe 2



Nappe 3

**Exercice 2**

On note  $E$  l'espace vectoriel des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à 2 et on rappelle que la famille  $(e_0, e_1, e_2)$  est une base de  $E$ , les fonctions  $e_0, e_1, e_2$  étant définies par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, e_0(t) = 1, e_1(t) = t \text{ et } e_2(t) = t^2.$$

On considère l'application  $\varphi$  qui, à toute fonction  $P$  de  $E$ , associe la fonction, notée  $\varphi(P)$ , définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, (\varphi(P))(x) = \int_0^1 P(x+t) dt$$

- 1) a) Montrer que  $\varphi$  est linéaire.
- b) Déterminer  $(\varphi(e_0))(x)$ ,  $(\varphi(e_1))(x)$  et  $(\varphi(e_2))(x)$  en fonction de  $x$ , puis écrire  $\varphi(e_0)$ ,  $\varphi(e_1)$  et  $\varphi(e_2)$  comme combinaisons linéaires de  $e_0, e_1, e_2$ .
- c) Dédire des questions précédentes que  $\varphi$  est un endomorphisme de  $E$ .

2) a) Écrire la matrice  $A$  de  $\varphi$  dans la base  $(e_0, e_1, e_2)$ . On vérifiera que la première ligne de  $A$  est :

$$\left( 1 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{3} \right)$$

- b) Justifier que  $\varphi$  est un automorphisme de  $E$ .
- c) L'endomorphisme  $\varphi$  est-il diagonalisable ?

3) Compléter les commandes Scilab suivantes pour que soit affichée la matrice  $A^n$  pour une valeur de  $n$  entrée par l'utilisateur :

```

n=input('entrez une valeur pour n : ')
A=[-----]
disp(-----)
    
```

4) a) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$ , il existe un réel  $u_n$  tel que l'on ait :

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n/2 & u_n \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donner  $u_0$  et établir que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + \frac{1}{6}(3n+2)$$

- b) En déduire, par sommation, l'expression de  $u_n$  pour tout entier naturel  $n$ .
- c) Écrire  $A^n$  sous forme de tableau matriciel.

### Exercice 3

Soit  $V$  une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre 1, dont la fonction de répartition est la fonction  $F_V$  définie par :  $F_V(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - e^{-x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$ .

On pose  $W = -\ln V$  et on admet que  $W$  est aussi une variable aléatoire dont la fonction de répartition est notée  $F_W$ . On dit que  $W$  suit la loi de Gumbel.

- 1) a) Montrer que :  $\forall x \in \mathbb{R}, F_W(x) = e^{-e^{-x}}$ .
- b) En déduire que  $W$  est une variable à densité.

On désigne par  $n$  un entier naturel non nul et par  $X_1, \dots, X_n$  des variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé, indépendantes et suivant la même loi que  $V$ , c'est-à-dire la loi  $\mathcal{E}(1)$ .

On considère la variable aléatoire  $Y_n$  définie par  $Y_n = \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$ , c'est-à-dire que, pour tout  $\omega$  de  $\Omega$ , on a :  $Y_n(\omega) = \max(X_1(\omega), X_2(\omega), \dots, X_n(\omega))$ . On admet que  $Y_n$  est une variable aléatoire à densité.

- 2) a) Montrer que la fonction de répartition  $F_{Y_n}$  de  $Y_n$  est définie par :

$$F_{Y_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ (1 - e^{-x})^n & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

- b) En déduire une densité  $f_{Y_n}$  de  $Y_n$ .

- 3) a) Donner un équivalent de  $1 - F_{Y_n}(t)$  lorsque  $t$  est au voisinage de  $+\infty$ , puis montrer que l'intégrale  $\int_0^{+\infty} (1 - F_{Y_n}(t)) dt$  est convergente.

- b) Établir l'égalité suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \int_0^x (1 - F_{Y_n}(t)) dt = x(1 - F_{Y_n}(x)) + \int_0^x t f_{Y_n}(t) dt$$

- c) Montrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(1 - F_{Y_n}(x)) = 0$ .

- d) En déduire que  $Y_n$  possède une espérance et prouver l'égalité :

$$E(Y_n) = \int_0^{+\infty} (1 - F_{Y_n}(t)) dt$$

- 4) a) Montrer, grâce au changement de variable  $u = 1 - e^{-t}$ , que l'on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \int_0^x (1 - F_{Y_n}(t)) dt = \int_0^{1 - e^{-x}} \frac{1 - u^n}{1 - u} du$$

- b) En déduire que  $\int_0^x (1 - F_{Y_n}(t)) dt = \sum_{k=1}^n \frac{(1 - e^{-x})^k}{k}$ , puis donner  $E(Y_n)$  sous forme de somme.

5) On pose  $Z_n = Y_n - \ln n$ .

a) On rappelle que `grand(1, n, 'exp', 1)` simule  $n$  variables aléatoires indépendantes et suivant toutes la loi exponentielle de paramètre 1.

Compléter la déclaration de fonction Scilab suivante afin qu'elle simule la variable aléatoire  $Z_n$ .

```
function Y=f(n)
x = grand(1, n, 'exp', 1)
Z =-----
endfunction
```

b) Voici deux scripts :

```
V=grand(1,10000,'exp',1)
W=-log(V)
s=linspace(0,10,11)
histplot(s,W)
```

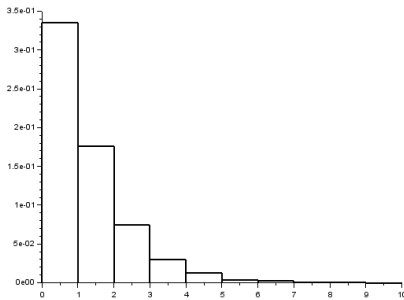
Script (1)

```
n=input('entrez la valeur de n : ')
Z=[] // La matrice-ligne Z est vide
for k=1:10000
    Z=[Z, f(n)]
end
s=linspace(0,10,11)
histplot(s,Z)
```

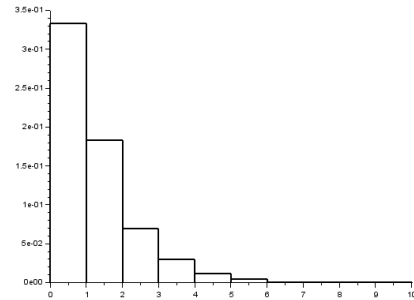
Script (2)

Chacun de ces scripts simule 10 000 variables indépendantes, regroupe les valeurs renvoyées en 10 classes qui sont les intervalles  $[0,1]$ ,  $]1,2]$ ,  $]2,3]$ , ...,  $]9,10]$ , et trace l'histogramme correspondant (la largeur de chaque rectangle est égale à 1 et leur hauteur est proportionnelle à l'effectif de chaque classe).

Le script (1) dans lequel les variables aléatoires suivent la loi de Gumbel (loi suivie par  $W$ ), renvoie l'histogramme (1) ci-dessous, alors que le script (2) dans lequel les variables aléatoires suivent la même loi que  $Z_n$ , renvoie l'histogramme (2) ci-dessous, pour lequel on a choisi  $n = 1000$ .



Histogramme (1)



Histogramme (2) pour  $n = 1000$

Quelle conjecture peut-on émettre quant au comportement de la suite des variables aléatoires  $(Z_n)$ .

6) On note  $F_{Z_n}$  la fonction de répartition de  $Z_n$ .

a) Justifier que, pour tout réel  $x$ , on a :  $F_{Z_n}(x) = F_{Y_n}(x + \ln n)$ .

b) Déterminer explicitement  $F_{Z_n}(x)$ .

c) Montrer que, pour tout réel  $x$ , on a :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \ln\left(1 - \frac{e^{-x}}{n}\right) = -e^{-x}$ .

d) Démontrer le résultat conjecturé à la question 5b).

## Problème

### Partie 1 : étude d'une variable aléatoire.

Les sommets d'un carré sont numérotés 1, 2, 3 et 4 de telle façon que les côtés du carré relient le sommet 1 au sommet 2, le sommet 2 au sommet 3, le sommet 3 au sommet 4 et le sommet 4 au sommet 1.

Un mobile se déplace aléatoirement sur les sommets de ce carré selon le protocole suivant :

- Au départ, c'est-à-dire à l'instant 0, le mobile est sur le sommet 1.
- Lorsque le mobile est à un instant donné sur un sommet, il se déplace à l'instant suivant sur l'un quelconque des trois autres sommets, et ceci de façon équiprobable.

Pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ , on note  $X_n$  la variable aléatoire égale au numéro du sommet sur lequel se situe le mobile à l'instant  $n$ . D'après le premier des deux points précédents, on a donc  $X_0 = 1$ .

1) Donner la loi de  $X_1$ , ainsi que l'espérance  $E(X_1)$  de la variable aléatoire  $X_1$ .

On admet pour la suite que la loi de  $X_2$  est donnée par :

$$P(X_2 = 1) = \frac{1}{3}, \quad P(X_2 = 2) = P(X_2 = 3) = P(X_2 = 4) = \frac{2}{9}$$

2) Pour tout entier naturel  $n$  supérieur ou égal à 2, donner, en justifiant, l'ensemble des valeurs prises par  $X_n$ .

3) a) Utiliser la formule des probabilités totales pour établir que, pour tout entier naturel  $n$  supérieur ou égal à 2, on a :

$$P(X_{n+1} = 1) = \frac{1}{3} (P(X_n = 2) + P(X_n = 3) + P(X_n = 4))$$

b) Vérifier que cette relation reste valable pour  $n = 0$  et  $n = 1$ .

c) Justifier que, pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ , on a  $P(X_n = 1) + P(X_n = 2) + P(X_n = 3) + P(X_n = 4) = 1$  et en déduire l'égalité :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(X_{n+1} = 1) = -\frac{1}{3}P(X_n = 1) + \frac{1}{3}$$

d) Établir alors que :  $\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(X_n = 1) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^n$ .

4) a) En procédant de la même façon qu'à la question précédente, montrer que l'on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(X_{n+1} = 2) = \frac{1}{3} (P(X_n = 1) + P(X_n = 3) + P(X_n = 4))$$

b) En déduire une relation entre  $P(X_{n+1} = 2)$  et  $P(X_n = 2)$ .

c) Montrer enfin que :  $\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(X_n = 2) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^n$ .

5) On admet que, pour tout entier naturel  $n$ , on a :

$$P(X_{n+1} = 3) = -\frac{1}{3}P(X_n = 3) + \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad P(X_{n+1} = 4) = -\frac{1}{3}P(X_n = 4) + \frac{1}{3}$$

En déduire sans calcul que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(X_n = 3) = P(X_n = 4) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^n$$

6) Déterminer, pour tout entier naturel  $n$ , l'espérance  $E(X_n)$  de la variable aléatoire  $X_n$ .

**Partie 2 : calcul des puissances d'une matrice A.**

Pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ , on considère la matrice-ligne de  $\mathcal{M}_{1,4}(\mathbb{R})$  :

$$U_n = (P(X_n = 1) \ P(X_n = 2) \ P(X_n = 3) \ P(X_n = 4))$$

7) a) Montrer (grâce à certains résultats de la partie 1) que, si l'on pose  $A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ , on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = U_n A$$

b) Établir par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, U_n = U_0 A^n$$

c) En déduire la première ligne de  $A^n$ .

8) Expliquer comment choisir la position du mobile au départ pour trouver les trois autres lignes de la matrice  $A^n$ , puis écrire ces trois lignes.

**Partie 3 : une deuxième méthode de calcul des puissances de A.**

On considère les matrices  $I$  et  $J$  suivantes :  $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  et  $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

9) Déterminer les réels  $a$  et  $b$  tels que  $A = aI + bJ$ .

10) a) Calculer  $J^2$  puis établir que, pour tout entier naturel  $k$  non nul, on a :  $J^k = 4^{k-1}J$ .

b) À l'aide de la formule du binôme de Newton, en déduire, pour tout entier naturel  $n$  non nul, l'expression de  $A^n$  comme combinaison linéaire de  $I$  et  $J$ .

c) Vérifier que l'expression trouvée reste valable pour  $n = 0$ .

**Partie 4 : informatique.**

11) a) Compléter le script Scilab suivant pour qu'il affiche les 100 premières positions, autres que celle d'origine, du mobile dont le voyage est étudié dans ce problème, ainsi que le nombre  $n$  de fois où il est revenu sur le sommet numéroté 1 au cours de ses 100 premiers déplacements (on pourra utiliser la commande `sum`).

```
A = [-----] / 3
x = grand(100, 'markov', A, 1)
n = -----
disp(x)
disp(n)
```

b) Après avoir exécuté cinq fois ce script, les réponses concernant le nombre de fois où le mobile est revenu sur le sommet numéroté 1 sont  $n = 23$ ,  $n = 28$ ,  $n = 23$ ,  $n = 25$  et  $n = 26$ . En quoi est-ce normal ?

# Corrigé

## Exercice 1 .....

1) La fonction  $f$  est une fonction polynomiale de deux variables donc elle est de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}^2$ .

2) a) Les dérivées partielles d'ordre 1 de  $f$  sont : 
$$\begin{cases} \partial_1(f)(x, y) = 4x^3 - 4x + 4y \\ \partial_2(f)(x, y) = 4y^3 + 4x - 4y \end{cases}$$

b) Le gradient de  $f$  est nul si, et seulement si : 
$$\begin{cases} \partial_1(f)(x, y) = 0 \\ \partial_2(f)(x, y) = 0 \end{cases}, \text{ c'est-à-dire,}$$

si et seulement si : 
$$\begin{cases} 4x^3 - 4x + 4y = 0 \\ 4y^3 + 4x - 4y = 0 \end{cases}$$

En simplifiant par 4, on obtient :

$$\nabla(f)(x, y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - x + y = 0 \\ y^3 + x - y = 0 \end{cases}$$

c) Pour résoudre ce système, on peut ajouter les deux lignes  $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$  et on obtient : 
$$\nabla(f)(x, y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - x + y = 0 \\ x^3 + y^3 = 0 \end{cases}$$
 . La deuxième équation s'écrit

$y^3 = -x^3$  que l'on peut aussi écrire (par imparité de la fonction "cube")  $y^3 = (-x)^3$ .

Comme la fonction "cube" est continue et strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , c'est une bijection de  $\mathbb{R}$  sur  $\mathbb{R}$  et ainsi :  $y^3 = (-x)^3 \Leftrightarrow y = -x$ .

En remplaçant dans le système, on a :

$$\nabla(f)(x, y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 2x = 0 \\ y = -x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x^2 - 2) = 0 \\ y = -x \end{cases}$$

On a donc : 
$$\nabla(f)(x, y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = \sqrt{2} \\ y = -\sqrt{2} \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = -\sqrt{2} \\ y = \sqrt{2} \end{cases}.$$

Les points critiques de  $f$  étant les points en lesquels le gradient s'annule, on peut conclure :

$$\text{Les points critiques de } f \text{ sont : } (0, 0), (\sqrt{2}, -\sqrt{2}) \text{ et } (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$$

3) a) Les dérivées partielles d'ordre 2 de  $f$  sont :

$$\begin{cases} \partial_{1,1}^2(f)(x,y) = 12x^2 - 4 \\ \partial_{1,2}^2(f)(x,y) = 4 \\ \partial_{2,1}^2(f)(x,y) = 4 \\ \partial_{2,2}^2(f)(x,y) = 12y^2 - 4 \end{cases} .$$

b) • La matrice hessienne de  $f$  en  $(0,0)$  est :

$$H_{0,0} = \nabla^2(f)(0,0) = \begin{pmatrix} \partial_{1,1}^2(f)(0,0) & \partial_{1,2}^2(f)(0,0) \\ \partial_{2,1}^2(f)(0,0) & \partial_{2,2}^2(f)(0,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} .$$

• De même, la matrice hessienne de  $f$  en  $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$  est :

$$H_{\sqrt{2}, -\sqrt{2}} = \nabla^2(f)(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = \begin{pmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 20 \end{pmatrix}$$

• Et enfin, la matrice hessienne de  $f$  en  $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$  est :

$$H_{-\sqrt{2}, \sqrt{2}} = \nabla^2(f)(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = \begin{pmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 20 \end{pmatrix}$$

c) • Les valeurs propres de  $H_{0,0}$  sont les réels  $\lambda$  pour lesquels le déterminant de  $H_{0,0} - \lambda I$  est nul. Comme  $H_{0,0} - \lambda I = \begin{pmatrix} -4-\lambda & 4 \\ 4 & -4-\lambda \end{pmatrix}$ , les valeurs propres de  $H_{0,0}$  sont les réels  $\lambda$  solutions de  $(-4-\lambda)^2 - 16 = 0$ , c'est-à-dire de  $(4+\lambda)^2 - 16 = 0$  ou encore  $\lambda^2 + 8\lambda = 0$ .

Les valeurs propres de  $H_{0,0}$  sont : 0 et -8

• Les valeurs propres de  $H_{\sqrt{2}, -\sqrt{2}}$  sont les réels  $\lambda$  pour lesquels le déterminant de  $H_{\sqrt{2}, -\sqrt{2}} - \lambda I$  est nul. Comme  $H_{\sqrt{2}, -\sqrt{2}} - \lambda I = \begin{pmatrix} 20-\lambda & 4 \\ 4 & 20-\lambda \end{pmatrix}$ , les valeurs propres de  $H_{0,0}$  sont les réels  $\lambda$  solutions de  $(20-\lambda)^2 - 16 = 0$ , c'est-à-dire de  $(20-\lambda)^2 = 16$ , soit encore  $20-\lambda = 4$  ou  $20-\lambda = -4$ .

Les valeurs propres de  $H_{\sqrt{2}, -\sqrt{2}}$  sont : 16 et 24

• Comme  $H_{-\sqrt{2}, \sqrt{2}} = H_{\sqrt{2}, -\sqrt{2}}$ , on peut tout de suite écrire :

Les valeurs propres de  $H_{-\sqrt{2}, \sqrt{2}}$  sont : 16 et 24

Les valeurs propres de  $H_{\sqrt{2}, -\sqrt{2}}$  et  $H_{-\sqrt{2}, \sqrt{2}}$  sont strictement positives donc  $f$  admet un minimum local en les points critiques  $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$  et  $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ , puisque l'on travaille sur l'ouvert  $\mathbb{R}^2$ .



On a  $f(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = (\sqrt{2})^4 + (-\sqrt{2})^4 - 2(\sqrt{2} + \sqrt{2})^2 = 4 + 4 - 16 = -8$  et on a aussi  $f(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = (-\sqrt{2})^4 + (\sqrt{2})^4 - 2(-\sqrt{2} - \sqrt{2})^2 = 4 + 4 - 16 = -8$ .

Le minimum local en  $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$  et  $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$  est égal à  $-8$

**d)** On a :

$$f(x, x) = x^4 + x^4 - 2(x - x)^2 = 2x^4$$

$$f(x, -x) = x^4 + (-x)^4 - 2(x + x)^2 = x^4 + x^4 - 8x^2 = 2x^4 - 8x^2 = 2x^2(x^2 - 4)$$

Au voisinage de  $x = 0$ , on a  $x^2 - 4 < 0$  donc  $f(x, -x) < 0$ , alors que  $f(x, x) \geq 0$ .

On en déduit que  $f$  change de signe "aux alentours" de  $(0, 0)$ , ce qui prouve que :

$f$  n'a pas d'extremum en  $(0, 0)$

**4) a)** En posant  $g(x, y) = f(x, y) - (x^2 - 2)^2 - (y^2 - 2)^2 - 2(x + y)^2$ , on a :

$$g(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2 - (x^2 - 2)^2 - (y^2 - 2)^2 - 2(x + y)^2$$

En développant, on trouve :

$$g(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x^2 - 2xy + y^2) - (x^4 - 4x^2 + 4) - (y^4 - 4y^2 + 4) - 2(x^2 + 2xy + y^2)$$

En enlevant les parenthèses, il reste :

$$g(x, y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2 - x^4 + 4x^2 - 4 - y^4 + 4y^2 - 4 - 2x^2 - 4xy - 2y^2$$

Après simplification, on obtient :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, g(x, y) = -8$$

**b)** D'après la question précédente, on a :

$$f(x, y) = (x^2 - 2)^2 + (y^2 - 2)^2 + 2(x + y)^2 - 8$$

Comme  $(x^2 - 2)^2 + (y^2 - 2)^2 + 2(x + y)^2 \geq 0$  (somme de carrés), cette inégalité prouve que, pour tout couple  $(x, y)$  de  $\mathbb{R}^2$ , on a  $f(x, y) \geq -8$ , avec égalité si  $(x, y)$  est un des points  $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$  et  $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$  qui sont les seuls à annuler à la fois  $(x^2 - 2)^2$ ,  $(y^2 - 2)^2$  et  $(x + y)^2$ .

On peut conclure :

$-8$  est un minimum global de  $f$

**5) a)** On peut proposer :

```
function z=f(x, y)
z=x^4+y^4-2*(x-y)^2
endfunction
```

**b) •** La première des trois nappes montre que la fonction associée possède un minimum global atteint en deux endroits (il n'est pas facile de distinguer les coordonnées !).

• La deuxième nappe montre que la fonction associée possède un seul minimum global (et rien d'autre).

• La troisième nappe est celle d'une fonction n'ayant pas d'extremum (ni minimum, ni maximum).

Conclusion :

La nappe N°1 est celle représentant la fonction  $f$

## Exercice 2.....

**1) a)** Soit  $P$  et  $Q$  deux polynômes de  $\mathbb{R}_n[X]$  et  $\lambda$  un réel.

On a :  $\forall x \in \mathbb{R}, (\varphi(P + \lambda Q))(x) = \int_0^1 (P + \lambda Q)(x+t) dt$ .

Par définition de l'addition des fonctions et du produit d'une fonction par un réel,

on en déduit :  $\forall x \in \mathbb{R}, (\varphi(P + \lambda Q))(x) = \int_0^1 (P(x+t) + \lambda Q(x+t)) dt$ .

Par linéarité de l'intégration, on a alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, (\varphi(P + \lambda Q))(x) = \int_0^1 P(x+t) dt + \lambda \int_0^1 Q(x+t) dt$$

On a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, (\varphi(P + \lambda Q))(x) = (\varphi(P))(x) + \lambda (\varphi(Q))(x) = (\varphi(P) + \lambda \varphi(Q))(x)$$

Ceci prouve, par définition de l'égalité de deux fonctions, que :

$$\varphi(P + \lambda Q) = \varphi(P) + \lambda \varphi(Q)$$

Conclusion :  $\varphi$  est linéaire.

**b) •** On a :  $(\varphi(e_0))(x) = \int_0^1 1 dt = 1$ .

• On a :  $(\varphi(e_1))(x) = \int_0^1 (x+t) dt = \left[ \frac{1}{2}(x+t)^2 \right]_0^1 = \frac{1}{2}(x+1)^2 - \frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2} + x$ .

• En utilisant la formule  $(x+1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ , on a :

$$(\varphi(e_2))(x) = \int_0^1 (x+t)^2 dt = \left[ \frac{1}{3}(x+t)^3 \right]_0^1 = \frac{1}{3}(x+1)^3 - \frac{1}{3}x^3 = \frac{1}{3} + x + x^2$$

On trouve ainsi (voir aide à la résolution) :

$$\varphi(e_0) = e_0. \quad \varphi(e_1) = \frac{1}{2}e_0 + e_1. \quad \varphi(e_2) = \frac{1}{3}e_0 + e_1 + e_2$$

**c)** Comme  $\varphi$  est linéaire, il reste à montrer que l'image d'un polynôme de  $E$  est encore un polynôme de  $E$ .

Tout polynôme  $P$  de  $E$  peut s'écrire :  $P = ae_0 + be_1 + ce_2$ , où  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont des réels.

On a alors, par linéarité de  $\varphi$  :

$$\varphi(P) = a\varphi(e_0) + b\varphi(e_1) + c\varphi(e_2)$$

En remplaçant grâce à la question précédente, on trouve :

$$\varphi(P) = ae_0 + b\left(\frac{1}{2}e_0 + e_1\right) + c\left(\frac{1}{3}e_0 + e_1 + e_2\right) = \left(a + \frac{b}{2} + \frac{c}{3}\right)e_0 + (b+c)e_1 + ce_2$$

Ceci montre que  $\varphi(P)$  est combinaison linéaire de  $e_0$ ,  $e_1$  et  $e_2$ .

Par conséquent,  $\varphi(P)$  appartient à  $E$ .

Conclusion :

$\varphi$  est un endomorphisme de  $E$

2) a) Par définition de la matrice  $A$  de  $\varphi$  dans la base  $(e_0, e_1, e_2)$ , on a :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Pour trouver  $\text{Ker}(\varphi)$ , on résout  $AX = 0$ , avec  $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ .

$$\text{On obtient : } AX = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{3}c = 0 \\ b + c = 0 \\ c = 0 \end{cases}.$$

On a donc  $c = 0$ , puis on en déduit, dans l'ordre,  $b = 0$  et enfin  $a = 0$ .

On a donc :

$$AX = 0 \Leftrightarrow X = 0$$

Ceci prouve que  $\text{Ker}(\varphi) = \{0\}$ .

Par conséquent,  $\varphi$  est injectif, et comme l'espace vectoriel  $E$  est de dimension finie, on peut affirmer que  $\varphi$  est bijectif, ce qui se traduit par :

$\varphi$  est un automorphisme de  $E$

c) La matrice  $A$  est triangulaire donc on voit sa seule valeur propre (donc la seule valeur propre de  $\varphi$ ) sur sa diagonale : c'est  $\lambda = 1$ .

On peut raisonner de deux façons :

- Par l'absurde. Si  $A$  était diagonalisable, il existerait une matrice  $D$  diagonale (avec des 1 sur la diagonale, on aurait donc  $D = I$ ) et une matrice  $P$  inversible telles que :  $A = PDP^{-1} = PIP^{-1} = PP^{-1} = I$ . Ceci est manifestement faux donc  $A$  n'est pas diagonalisable et  $\varphi$  non plus.

- En cherchant le sous-espace propre associé à la valeur propre  $\lambda = 1$ .

On résout  $AX = X$ , avec  $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ , et on trouve :

$$AX = X \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{3}c = a \\ b + c = b \\ c = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}b + \frac{1}{3}c = 0 \\ c = 0 \\ c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

On a donc  $X = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ , ce qui prouve que le sous-espace propre cherché est

de dimension  $1 < 3$ , ce qui ne suffit pas pour rendre  $A$  (ou  $\varphi$ ) diagonalisable.

$\varphi$  n'est pas diagonalisable

3) On a tout ce qu'il faut pour écrire les deux commandes complètes :

```
A=[1,1/2,1/3;0,1,1;0,0,1]
disp(A^n)
```

4) a) •  $A^0 = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  donc en posant  $u_0 = 0$  on a bien  $A^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0/2 & u_0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

• Si l'on suppose que, pour un certain entier naturel  $n$ , il existe un réel  $u_n$

tel que  $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n/2 & u_n \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ , alors on a :

$$A^{n+1} = A^n \times A = \begin{pmatrix} 1 & n/2 & u_n \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} + \frac{n}{2} & \frac{1}{3} + \frac{n}{2} + u_n \\ 0 & 1 & 1+n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En posant  $u_{n+1} = u_n + \frac{n}{2} + \frac{1}{3}$ , on trouve bien :

$$A^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & (n+1)/2 & u_{n+1} \\ 0 & 1 & n+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Conclusion : par récurrence, il existe une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle que, pour tout

entier naturel  $n$ , on ait :  $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n/2 & u_n \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ , cette suite étant définie par  $u_0 = 0$  et

par la relation, valable pour tout entier naturel  $n$  :  $u_{n+1} = u_n + \frac{n}{2} + \frac{1}{3}$ .

b) D'après ce qui précède, on a :  $\forall k \in \mathbb{N}, u_{k+1} - u_k = \frac{k}{2} + \frac{1}{3}$ . Ainsi, pour tout  $n$

de  $\mathbb{N}^*$ , on a :  $\sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) = \sum_{k=0}^{n-1} \left( \frac{k}{2} + \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} k + \frac{1}{3} \sum_{k=0}^{n-1} 1 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} k + \frac{1}{3} \sum_{k=0}^{n-1} 1$ .

Par "télescopage" dans la somme du membre de gauche et en remplaçant les sommes connues dans le membre de droite, on obtient :

$$u_n - u_0 = \frac{1}{2} \times \frac{(n-1)n}{2} + \frac{1}{3} \times n = \frac{n(n-1)}{4} + \frac{n}{3} = \frac{3n(n-1) + 4n}{12} = \frac{n(3(n-1) + 4)}{12}$$

Comme  $u_0 = 0$ , il reste :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{n(3n+1)}{12}$ .

Cette égalité étant valable pour  $n = 0$  (elle donne bien  $u_0 = 0$ ), on peut résumer :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{n(3n+1)}{12}}$$

c) On remplace :

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n/2 & \frac{n(3n+1)}{12} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

### Exercice 3.....

1) a) Tout d'abord, on peut remarquer que, comme  $V(\Omega) = \mathbb{R}_+^*$ , on a  $W(\Omega) = \mathbb{R}$ . On a alors :  $\forall x \in \mathbb{R}, F_W(x) = P(W \leq x) = P(-\ln V \leq x) = P(\ln V \geq -x)$ . Comme la fonction exponentielle est une *bijection* croissante de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}_+^*$ , on a :

$$P(\ln V \geq -x) = P(V \geq e^{-x})$$

L'inclusion  $(\ln V \geq -x) \subset (V \geq e^{-x})$  est assurée par la croissance de la fonction exponentielle et l'inclusion inverse est assurée par la croissance de la fonction logarithme népérien (ce qui explique la présence du mot *bijection*).

Finalement :  $\forall x \in \mathbb{R}, F_W(x) = P(V \geq e^{-x}) = 1 - F_V(e^{-x})$ .

Comme  $e^{-x} > 0$ , on trouve en remplaçant :  $F_W(x) = 1 - (1 - e^{-e^{-x}})$ .

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_W(x) = e^{-e^{-x}}$$

**b)** La fonction  $F_W$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$  comme composée de fonctions de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$  (elle est donc, a fortiori, continue sur  $\mathbb{R}$ ) donc :

$W$  est une variable à densité

**2) a)** Dire que la variable prenant la plus grande des valeurs prises par  $X_1, \dots, X_n$  (il s'agit de  $Y_n$ ) prend une valeur inférieure ou égale à  $x$ , c'est dire que chacune des variables  $X_1, \dots, X_n$  a pris une valeur inférieure ou égale à  $x$  (sinon,  $Y_n$  ne serait pas inférieure ou égal à  $x$ ). On a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_{Y_n}(x) = P(Y_n \leq x) = P\left(\bigcap_{k=1}^n [X_k \leq x]\right)$$

Comme  $X_1, X_2, \dots, X_n$  sont mutuellement indépendantes, on obtient :

$$F_{Y_n}(x) = \prod_{k=1}^n P(X_k \leq x) = \prod_{k=1}^n F_{X_k}(x)$$

Les variables  $X_k$  suivent la même loi que  $V$  donc :  $F_{Y_n}(x) = (F_V(x))^n$ .

Pour finir, on sait que  $F_V(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - e^{-x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$  donc  $F_{Y_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ (1 - e^{-x})^n & \text{si } x > 0 \end{cases}$ .

Pour finir, on peut écrire, pour respecter la demande de l'énoncé :

$$F_{Y_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ (1 - e^{-x})^n & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

**b)** On dérive  $F_{Y_n}$  sauf en 0, ce qui donne :  $F_{Y_n}'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ n e^{-x} (1 - e^{-x})^{n-1} & \text{si } x > 0 \end{cases}$ .

En posant, par exemple,  $f_{Y_n}(0) = 0$ , on obtient une densité  $f_{Y_n}$  de  $Y_n$  définie par :

$$f_{Y_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ n e^{-x} (1 - e^{-x})^{n-1} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

**3) a)** Pour tout  $t$  strictement positif, on a :  $1 - F_{Y_n}(t) = 1 - (1 - e^{-t})^n$ .

Or, lorsque  $t$  est au voisinage de  $+\infty$ ,  $-e^{-t}$  est au voisinage de 0 donc on peut utiliser l'équivalent :  $(1+u)^n - 1 \underset{0}{\sim} nu$ , avec ici  $u = -e^{-t}$ . On peut alors écrire

$1 - F_{Y_n}(t) = -\left((1 - e^{-t})^n - 1\right)$  et on obtient :  $1 - F_{Y_n}(t) \underset{+\infty}{\sim} -n(-e^{-t})$ .

En simplifiant :

$$\boxed{1 - F_{Y_n}(t) \underset{+\infty}{\sim} n e^{-t}}$$

Comme l'intégrale  $\int_0^{+\infty} n e^{-t} dt$  est convergente (elle est de même nature que  $\int_0^{+\infty} e^{-t} dt$  qui converge et vaut 1, en tant qu'intégrale de densité d'une variable suivant la loi exponentielle de paramètre 1), le critère d'équivalence pour les intégrales de fonctions continues et positives permet de conclure que :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} (1 - F_{Y_n}(t)) dt \text{ est convergente}}$$

**b)** On effectue une intégration par parties dans  $\int_0^x (1 - F_{Y_n}(t)) dt$  en posant :

$u'(t) = 1$  et  $v(t) = 1 - F_{Y_n}(t)$ . On a alors  $v'(t) = -f_{Y_n}(t)$  et on peut choisir  $u(t) = t$ .

Les fonctions  $u$  et  $v$  sont de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}_+$  donc sur  $[0, x]$ , pour tout  $x$  positif ou nul, ce qui rend l'intégration par parties licite et donne :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \int_0^x (1 - F_{Y_n}(t)) dt = \left[ t(1 - F_{Y_n}(t)) \right]_0^x + \int_0^x t f_{Y_n}(t) dt$$

En 0, le crochet s'annule et il reste :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+, \int_0^x (1 - F_{Y_n}(t)) dt = x(1 - F_{Y_n}(x)) + \int_0^x t f_{Y_n}(t) dt}$$

**c)** On a  $x(1 - F_{Y_n}(x)) \underset{+\infty}{\sim} n x e^{-x}$  et comme, par croissances comparées, on a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x} = 0$ , on en déduit :

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} x(1 - F_{Y_n}(x)) = 0}$$

**d)** L'intégrale  $\int_0^x (1 - F_{Y_n}(t)) dt$  possède une limite finie lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ , et cette limite est  $\int_0^{+\infty} (1 - F_{Y_n}(t)) dt$ . De plus, on vient de voir que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(1 - F_{Y_n}(x)) = 0$  donc, avec l'égalité obtenue à la question 3b), on est sûr que l'intégrale  $\int_0^x t f_{Y_n}(t) dt$  possède une limite finie lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$  (par différence), ce qui signifie que  $\int_0^{+\infty} t f_{Y_n}(t) dt$  est convergente (absolument car les fonctions sont positives), c'est-à-dire que  $Y_n$  possède une espérance (car  $\int_{-\infty}^0 t f_{Y_n}(t) dt = 0$ ).

Après passage à la limite dans l'égalité obtenue à la question 3b), on trouve :

$$E(Y_n) = \int_0^{+\infty} (1 - F_{Y_n}(t)) dt$$

4) a) La fonction  $t \mapsto 1 - e^{-t}$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}_+$ , donc sur  $[0, x]$ , par conséquent, le changement de variable  $u = 1 - e^{-t}$  est licite.

On obtient alors :  $1 - F_{Y_n}(t) = 1 - (1 - e^{-t})^n = 1 - u^n$  et on a  $du = e^{-t} dt = (1 - u) dt$ ,

d'où  $dt = \frac{1}{1-u} du$ . Finalement :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \int_0^x (1 - F_{Y_n}(t)) dt = \int_0^{1-e^{-x}} \frac{1-u^n}{1-u} du$$

b) Comme  $u$  est différent de 1 ( $0 \leq u \leq 1 - e^{-x}$ ), on a :  $\frac{1-u^n}{1-u} = \sum_{j=0}^{n-1} u^j$ . En

remplaçant dans l'intégrale ci-dessus, on trouve :

$$\int_0^x (1 - F_{Y_n}(t)) dt = \int_0^{1-e^{-x}} \left( \sum_{j=0}^{n-1} u^j \right) du$$

Par linéarité de l'intégration, on en déduit :

$$\int_0^x (1 - F_{Y_n}(t)) dt = \sum_{j=0}^{n-1} \int_0^{1-e^{-x}} u^j du = \sum_{j=0}^{n-1} \left[ \frac{u^{j+1}}{j+1} \right]_0^{1-e^{-x}} = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(1-e^{-x})^{j+1}}{j+1}$$

Avec le changement d'indice  $k = j + 1$ , on a bien :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \int_0^x (1 - F_{Y_n}(t)) dt = \sum_{k=1}^n \frac{(1-e^{-x})^k}{k}$$

Comme  $E(Y_n) = \int_0^{+\infty} (1 - F_{Y_n}(t)) dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x (1 - F_{Y_n}(t)) dt$ , il faut chercher la

limite quand  $x$  tend vers  $+\infty$  de  $\sum_{k=1}^n \frac{(1-e^{-x})^k}{k}$ .

Comme cette somme est finie, son nombre de termes ne dépendant pas de  $x$ , et

comme  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$ , on obtient :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{(1-e^{-x})^k}{k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ .

En faisant tendre  $x$  vers  $+\infty$  dans l'égalité  $\int_0^x (1 - F_{Y_n}(t)) dt = \sum_{k=1}^n \frac{(1-e^{-x})^k}{k}$ , on a :

$$E(Y_n) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

5) a) Avec le rappel fait, il n'y a pas trop de mystère : la deuxième ligne permet de simuler  $n$  variables indépendantes suivant toutes la loi exponentielle de paramètre 1 donc il suffit de prendre le max de ces  $n$  variables et d'enlever  $\ln n$  pour simuler  $Z_n$ . On a donc :



```

fonction Z=f(n)
x = grand(1, n, 'unf', 0, 1)
Z =max(x) -log(n)
endfonction

```

**b)** Comme les histogrammes se ressemblent pour une grande valeur de  $n$ , on peut penser que, si  $n$  est assez grand, la loi de  $Z_n$  est "proche" de la loi de  $W$ . Plus précisément :

- La hauteur du premier rectangle de l'histogramme (1) donne une valeur approchée de  $F_W(1)$ , la hauteur du premier rectangle de l'histogramme (2) donne une valeur approchée de  $F_{Z_n}(1)$ . On en déduit (ça se voit)  $F_W(1) \approx F_{Z_n}(1)$ .

- La hauteur du deuxième rectangle de l'histogramme (1) donne une valeur approchée de  $F_W(2) - F_W(1)$ , la hauteur du deuxième rectangle de l'histogramme (2) donne une valeur approchée de  $F_{Z_n}(2) - F_{Z_n}(1)$ . On en déduit  $F_W(2) \approx F_{Z_n}(2)$ .

- Et ainsi de suite.

On peut donc conjecturer que la suite  $(Z_n)$  converge en loi vers  $W$ .

**6) a)** Pour tout réel  $x$ , on a :

$$F_{Z_n}(x) = P(Z_n \leq x) = P(Y_n - \ln n \leq x) = P(Y_n \leq x + \ln n)$$

Conclusion :

$$F_{Z_n}(x) = F_{Y_n}(x + \ln n)$$

**b)** On peut remarquer au préalable que  $Z_n(\Omega) = [-\ln n, +\infty[$ , ce qui peut éviter de se tromper un peu plus loin.

Comme  $F_{Z_n}(x) = F_{Y_n}(x + \ln n)$  et comme  $F_{Y_n}(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ (1 - e^{-y})^n & \text{si } y \geq 0 \end{cases}$ , il suffit de

remplacer  $y$  par  $x + \ln n$ , les conditions sur  $y$  devenant  $x + \ln n < 0$  et  $x + \ln n \geq 0$ , c'est-à-dire  $x < -\ln n$  et  $x \geq -\ln n$ , ce qui confirme que  $Z_n(\Omega) = [-\ln n, +\infty[$ .

On a donc :  $F_{Z_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -\ln n \\ (1 - e^{-(x+\ln n)})^n & \text{si } x \geq -\ln n \end{cases}$ .

Comme  $e^{-(x+\ln n)} = e^{-x}e^{-\ln n} = e^{-x} \frac{1}{e^{\ln n}} = \frac{e^{-x}}{n}$ , on peut simplifier, ce qui donne :

$$F_{Z_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -\ln n \\ \left(1 - \frac{e^{-x}}{n}\right)^n & \text{si } x \geq -\ln n \end{cases}$$

c) Comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x}}{n} = 0$ , on peut utiliser l'équivalent classique  $\ln(1+u) \underset{0}{\sim} u$ , ce qui implique (pour  $n$  assez grand afin que  $1 - \frac{e^{-x}}{n} > 0$ ) :  $\ln\left(1 - \frac{e^{-x}}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} -\frac{e^{-x}}{n}$ .

En multipliant par  $n$ , on obtient :

$$n \ln\left(1 - \frac{e^{-x}}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} -e^{-x}$$

Comme deux équivalents ont même limite, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \ln\left(1 - \frac{e^{-x}}{n}\right) = -e^{-x}$$

d) • Pour un réel  $x$  fixé, comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} -\ln n = -\infty$ , alors on a, pour tout entier naturel  $n$  assez grand ( $n > e^{-x}$ ), on a  $x \geq -\ln n$ , ce qui justifie de prendre :

$$F_{Z_n}(x) = \left(1 - \frac{e^{-x}}{n}\right)^n$$

On peut alors écrire  $F_{Z_n}(x) = \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{e^{-x}}{n}\right)\right)$ . Comme d'une part,

$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \ln\left(1 - \frac{e^{-x}}{n}\right) = -e^{-x}$  et comme, d'autre part, la fonction exponentielle est

continue en  $-e^{-x}$ , on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{e^{-x}}{n}\right)^n = e^{-e^{-x}}$ , soit :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \lim_{n \rightarrow +\infty} F_{Z_n}(x) = e^{-e^{-x}} = F_W(x)$$

On vient de montrer que :

$$(Z_n) \text{ converge en loi vers } W$$

## Problème .....

### Partie 1

1) Étant sur le sommet 1 à l'instant 0, le mobile sera de façon équiprobable sur l'un des trois sommets 2, 3 ou 4 à l'instant 1. Par conséquent, on a :

$$\forall k \in \llbracket 2, 4 \rrbracket, P(X_1 = k) = \frac{1}{3}$$

On en déduit :  $E(X_1) = 2 \times \frac{1}{3} + 3 \times \frac{1}{3} + 4 \times \frac{1}{3}$ , d'où :

$$E(X_1) = 3$$

**Remarque.** On pouvait éviter ce calcul car  $X_1$  suit la loi uniforme sur  $\llbracket 2, 4 \rrbracket$ .

2) À l'instant 1, on a trois options :

- Le mobile est sur le sommet 2 et à l'instant 2, il peut aller sur l'un des sommets 1, 3 ou 4.
- Le mobile est sur le sommet 3 et à l'instant 2, il peut aller sur l'un des sommets 1, 2 ou 4.
- Le mobile est sur le sommet 4 et à l'instant 2, il peut aller sur l'un des sommets 1, 2 ou 3.

On a donc  $X_2(\Omega) = \llbracket 1, 4 \rrbracket$ .

Le même processus se reproduit ensuite : à partir de l'instant 2, le mobile peut se trouver sur n'importe quel sommet. On a donc :

$$\forall n \geq 2, X_n(\Omega) = \llbracket 1, 4 \rrbracket$$

3) a) Pour  $n$  supérieur ou égal à 2, la formule des probabilités totales associée au système complet d'événements  $(X_n = k)_{k \in \llbracket 1, 4 \rrbracket}$ , chacun étant de probabilité non nulle, s'écrit :

$$P(X_{n+1} = 1) = \sum_{i=1}^4 P(X_n = i) P_{(X_n=i)}(X_{n+1} = 1)$$

D'après les conditions du voyage, le mobile se dirige vers un *autre sommet* que celui où il se trouve, et ceci de façon équiprobable donc on a :

$$P_{(X_n=i)}(X_{n+1} = 1) = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{si } 2 \leq i \leq 4 \\ 0 & \text{si } i = 1 \end{cases}$$

Il reste alors  $P(X_{n+1} = 1) = \sum_{i=2}^4 P(X_n = i) \times \frac{1}{3}$ , ce qui s'écrit :

$$P(X_{n+1} = 1) = \frac{1}{3} (P(X_n = 2) + P(X_n = 3) + P(X_n = 4))$$

b) • Pour  $n = 0$ , l'égalité précédente est correcte puisqu'elle fournit :

$$P(X_1 = 1) = \frac{1}{3} (P(X_0 = 2) + P(X_0 = 3) + P(X_0 = 4)) = \frac{1}{3} (0 + 0 + 0) = 0.$$

• Pour  $n = 1$ , l'égalité précédente est correcte puisqu'elle fournit :

$$P(X_2 = 1) = \frac{1}{3} (P(X_1 = 2) + P(X_1 = 3) + P(X_1 = 4)) = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{3}.$$

c) • Pour  $n \geq 2$ , la famille  $(X_n = k)_{k \in \llbracket 1, 4 \rrbracket}$  est un système complet d'événements donc :  $P(X_n = 1) + P(X_n = 2) + P(X_n = 3) + P(X_n = 4) = 1$ .

- Pour  $n=1$ , on a  $P(X_1=1)=0$   $P(X_1=2)=P(X_1=3)=P(X_1=4)=\frac{1}{3}$

donc on a encore  $P(X_1=1)+P(X_1=2)+P(X_1=3)+P(X_1=4)=1$

- Pour  $n=0$ , on a  $P(X_0=1)=1$ ,  $P(X_0=2)=P(X_0=3)=P(X_0=4)=0$

donc on a encore  $P(X_1=1)+P(X_1=2)+P(X_1=3)+P(X_1=4)=1$ .

Dans tous les cas, on a bien :

$$\boxed{P(X_n=1)+P(X_n=2)+P(X_n=3)+P(X_n=4)=1}$$

On en déduit que  $P(X_n=2)+P(X_n=3)+P(X_n=4)=1-P(X_n=1)$ , et en remplaçant dans l'égalité de la question 3a) donnant  $P(X_{n+1}=1)$ , on obtient :

$$P(X_{n+1}=1)=\frac{1}{3}(1-P(X_n=1))$$

On a donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, P(X_{n+1}=1)=-\frac{1}{3}P(X_n=1)+\frac{1}{3}}$$

**d)** On reconnaît que la suite  $(P(X_n=1))_{n \geq 2}$  est arithmético-géométrique.

Soit donc  $x$  le réel vérifiant l'égalité  $x=-\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}$  : on a  $x=\frac{1}{4}$ . On pose

$v_n = P(X_n=1) - \frac{1}{4}$  et on trouve alors :

$$v_{n+1} = P(X_{n+1}=1) - \frac{1}{4} = -\frac{1}{3}P(X_n=1) + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{3}P(X_n=1) + \frac{1}{12}$$

Mais  $P(X_n=1) = v_n + \frac{1}{4}$  donc :  $v_{n+1} = -\frac{1}{3}\left(v_n + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{12} = -\frac{1}{3}v_n$

La suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est donc géométrique de raison  $-\frac{1}{3}$  et de premier terme

$v_0 = P(X_0=1) - \frac{1}{4} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ , ce qui implique, d'après le cours :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{3}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^n$$

Comme  $P(X_n=1) = v_n + \frac{1}{4}$ , on en déduit :

$$\boxed{\forall n \geq 2, P(X_n=1) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^n}$$

**Remarque.** On pouvait aussi soustraire membre à membre les deux égalités

$$\begin{cases} P(X_{n+1} = 1) = -\frac{1}{3}P(X_n = 1) + \frac{1}{3} \\ x = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3} \end{cases}$$

On obtenait alors :  $P(X_{n+1} = 1) - x = -\frac{1}{3}(P(X_n = 1) - x)$ , c'est-à-dire  $v_{n+1} = -\frac{1}{3}v_n$  puis on terminait de la même manière.

**4) a)** C'est le même plan qu'à la question 3). Pour  $n$  supérieur ou égal à 2, la formule des probabilités totales associée au même système complet d'événements, s'écrit :

$$P(X_{n+1} = 2) = \sum_{i=1}^4 P(X_n = i) P_{(X_n=i)}(X_{n+1} = 2)$$

D'après les conditions du voyage, on a  $P_{(X_n=i)}(X_{n+1} = 2) = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{si } i \in \{1, 3, 4\} \\ 0 & \text{si } i = 2 \end{cases}$  et il

reste :  $\forall n \geq 2, P(X_{n+1} = 2) = \frac{1}{3}(P(X_n = 1) + P(X_n = 3) + P(X_n = 4))$ .

On vérifie que cette égalité reste valable pour  $n = 0$  et  $n = 1$ , ce qui prouve que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, P(X_{n+1} = 2) = \frac{1}{3}(P(X_n = 1) + P(X_n = 3) + P(X_n = 4))$$

**b)** Pour  $n \geq 2$ , toujours avec le système complet d'événements  $(X_n = k)_{k \in \llbracket 1, 4 \rrbracket}$ , on peut cette fois écrire que  $P(X_n = 1) + P(X_n = 3) + P(X_n = 4) = 1 - P(X_n = 2)$ , et en remplaçant dans  $P(X_{n+1} = 2)$ , on obtient :  $P(X_{n+1} = 2) = \frac{1}{3}(1 - P(X_n = 2))$ .

On a donc :

$$\boxed{\forall n \geq 2, P(X_{n+1} = 2) = -\frac{1}{3}P(X_n = 2) + \frac{1}{3}}$$

On vérifie aussi que cette égalité reste valable pour  $n = 0$  et  $n = 1$ , ce qui donne :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, P(X_{n+1} = 2) = -\frac{1}{3}P(X_n = 2) + \frac{1}{3}}$$

**c)** On reconnaît que la suite  $(P(X_n = 2))_{n \in \mathbb{N}}$  est arithmético-géométrique mais cette fois, la suite  $(P(X_n = 2) - \frac{1}{4})_{n \in \mathbb{N}}$  est géométrique de raison  $-\frac{1}{3}$  et de premier terme  $P(X_0 = 2) - \frac{1}{4} = 0 - \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}$ , ce qui implique :

$$\forall n \in \mathbb{N}, P(X_n = 2) - \frac{1}{4} = -\frac{1}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^n$$

On trouve donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, P(X_n = 2) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^n}$$

5) En admettant que, pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ , on ait  $P(X_{n+1} = 3) = -\frac{1}{3}P(X_n = 3) + \frac{1}{3}$  et

$$P(X_{n+1} = 4) = -\frac{1}{3}P(X_n = 4) + \frac{1}{3},$$

alors les suites  $(P(X_n = 3))_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(P(X_n = 4))_{n \in \mathbb{N}}$  vérifient la même relation de récurrence liant deux termes consécutifs que la suite  $(P(X_n = 2))_{n \in \mathbb{N}}$ , et ont le même premier terme, à savoir :

$$P(X_0 = 3) = P(X_0 = 4) = 0 = P(X_0 = 2)$$

Par conséquent, ces trois suites sont égales, ce qui justifie que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, P(X_n = 3) = P(X_n = 4) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^n$$

6) La variable  $X_n$  est finie donc elle possède une espérance et celle-ci est :

$$E(X_n) = 1 \times P(X_n = 1) + 2 \times P(X_n = 2) + 3 \times P(X_n = 3) + 4 \times P(X_n = 4).$$

$$E(X_n) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^n + 2 \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^n\right) + 3 \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^n\right) + 4 \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^n\right).$$

$$E(X_n) = \frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{3}{4} + \frac{4}{4} + \frac{3}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^n - \frac{2}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^n - \frac{3}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^n - \frac{4}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^n.$$

$$E(X_n) = \frac{10}{4} - \frac{6}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^n.$$

Bilan :

$$\boxed{E(X_n) = \frac{5}{2} - \frac{3}{2} \left(-\frac{1}{3}\right)^n}$$

## Partie 2

7) a) Pour tout entier naturel  $n$ , on a :

$$U_n A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} P(X_n = 1) & P(X_n = 2) & P(X_n = 3) & P(X_n = 4) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

En effectuant ce produit matriciel, on obtient une matrice ligne dont :

- Le 1<sup>er</sup> élément est  $\frac{1}{3} (P(X_n = 2) + P(X_n = 3) + P(X_n = 4))$ .

- Le 2<sup>ème</sup> élément est  $\frac{1}{3} (P(X_n = 1) + P(X_n = 3) + P(X_n = 4))$ .

• Le 3<sup>ème</sup> élément est  $\frac{1}{3}(P(X_n = 1) + P(X_n = 2) + P(X_n = 4))$ .

• Le 4<sup>ème</sup> élément est  $\frac{1}{3}(P(X_n = 1) + P(X_n = 2) + P(X_n = 3))$ .

D'après les questions 3a), et 4a), les deux premiers éléments sont  $P(X_{n+1} = 1)$  et  $P(X_{n+1} = 2)$ . Sans refaire les calculs faits aux questions 3a) et 4a), on constate que les deux éléments suivants sont  $P(X_{n+1} = 3)$  et  $P(X_{n+1} = 4)$ . On a donc :

$$U_n A = (P(X_{n+1} = 1) \ P(X_{n+1} = 2) \ P(X_{n+1} = 3) \ P(X_{n+1} = 4)) = U_{n+1}$$

Bilan :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = U_n A}$$

b) • Pour  $n = 0$ , on a :  $U_0 A^0 = U_0 I = U_0$ .

• Si l'on suppose, pour un certain entier naturel  $n$ , que  $U_n = U_0 A^n$ , alors on

a :  $U_{n+1} = U_n A = (U_0 A^n) A = U_0 A^{n+1}$ .

• On a bien montré par récurrence que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, U_n = U_0 A^n}$$

c) On connaît  $U_n$  et on a  $U_0 = (1 \ 0 \ 0 \ 0)$ , puisque  $X_0$  est la variable certaine égale à 1 (le mobile est sur le sommet 1 au départ), donc en notant

$$A^n = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{pmatrix}, \text{ l'égalité } U_n = U_0 A^n \text{ s'écrit :}$$

$$(P(X_n = 1) \ P(X_n = 2) \ P(X_n = 3) \ P(X_n = 4)) = (1 \ 0 \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{pmatrix}$$

On en déduit par produit :

$$P(X_n = 1) = a_1 \quad P(X_n = 2) = a_2 \quad P(X_n = 3) = a_3 \quad P(X_n = 4) = a_4$$

La première ligne  $(a_1, a_2, a_3, a_4)$  de  $A^n$  est donc :

$$\left( \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^n \quad \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^n \quad \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^n \quad \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^n \right)$$

8) En plaçant le mobile au départ sur le sommet 2, on a  $U_0 = (0 \ 1 \ 0 \ 0)$  et des calculs similaires à ceux faits aux questions 3) et 4) donnent cette fois :

$$P(X_n = 1) = P(X_n = 3) = P(X_n = 4) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^n \quad \text{et} \quad P(X_n = 2) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^n$$

Comme on a :

$$(P(X_n=1) \ P(X_n=2) \ P(X_n=3) \ P(X_n=4)) = (0 \ 1 \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{pmatrix}$$

On en déduit par produit :

$$P(X_n=1) = b_1 \quad P(X_n=2) = b_2 \quad P(X_n=3) = b_3 \quad P(X_n=4) = b_4$$

La deuxième ligne de  $A^n$  est donc :

$$\left( \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^n \quad \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^n \quad \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^n \quad \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^n \right)$$

On trouve la troisième ligne de  $A^n$  en plaçant le mobile au départ sur le sommet 3, ce qui donne :

$$\left( \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^n \quad \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^n \quad \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^n \quad \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^n \right)$$

On trouve la quatrième ligne de  $A^n$  en plaçant le mobile au départ sur le sommet 4, ce qui donne :

$$\left( \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^n \quad \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^n \quad \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^n \quad \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^n \right)$$

### Partie 3

$$9) \text{ On a } A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ donc } A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Conclusion :

$$\boxed{A = -\frac{1}{3}I + \frac{1}{3}J}$$

$$10) \text{ a) On a } J^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} = 4J.$$

Procédons par récurrence.

- Pour  $n=1$ , on a  $4^{1-1}J = 4^0J = J$
- Supposons, pour un certain entier naturel  $k$  non nul, que  $J^k = 4^{k-1}J$ , alors on a :  
 $J^{k+1} = J^k \times J = (4^{k-1}J)J = 4^{k-1}J^2 = 4^{k-1} \times 4J = 4^k J$

b) Comme les matrices  $I$  et  $J$  commutent, on peut appliquer la formule du binôme de Newton, qui s'écrit, pour tout entier naturel  $n$  :



$$A^n = \left(\frac{1}{3}(J-I)\right)^n = \frac{1}{3^n}(J-I)^n = \frac{1}{3^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-I)^{n-k} J^k = \frac{1}{3^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} J^k$$

Pour  $n$  supérieur ou égal à 1, on isole le premier terme, car la relation  $J^k = 4^{k-1}J$  n'est valable que pour  $k \geq 1$ . On a alors :

$$A^n = \frac{1}{3^n} \left( (-1)^n J^0 + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} J^k \right) = \frac{1}{3^n} \left( (-1)^n I + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} 4^{k-1} J \right)$$

En mettant  $\frac{1}{4}$  en facteur, on trouve :  $A^n = \frac{1}{3^n} \left( (-1)^n I + \frac{1}{4} \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} 4^k J \right)$

On ajoute le terme d'indice 0 à la somme puis on l'enlève :

$$A^n = \frac{1}{3^n} \left( (-1)^n I + \frac{1}{4} \left( \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 4^k (-1)^{n-k} - (-1)^n \right) J \right)$$

On peut maintenant appliquer de nouveau la formule du binôme :

$$A^n = \frac{1}{3^n} \left( (-1)^n I + \frac{1}{4} \left( (4-1)^n - (-1)^n \right) J \right)$$

On trouve alors :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, A^n = \frac{1}{3^n} \left( (-1)^n I + \frac{1}{4} [3^n - (-1)^n] J \right)$

Finalement :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, A^n = \left(-\frac{1}{3}\right)^n I + \frac{1}{4} \left[ 1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^n \right] J}$$

c) Pour  $n = 0$ , cette relation reste valable puisqu'elle donne :

$$A^0 = \left(-\frac{1}{3}\right)^0 I + \frac{1}{4} \left[ 1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^0 \right] J = I + 0 \times J = I$$

#### Partie 4

11) a) Pour la première ligne, on déclare la matrice A, puis, pour la troisième ligne, on ajoute les valeurs de  $x$  égales à 1, ce qui donne le nombre de retours du mobile sur le sommet 1 au cours de ses 100 premiers déplacements.

```
A = [0, 1, 1, 1; 1, 0, 1, 1; 1, 1, 0, 1; 1, 1, 1, 0] / 3
x = grand(100, 'markov', A, 1)
n = sum(x==1)
disp(x)
disp(n)
```

b) Sur 100 déplacements, le nombre de fois où le mobile est revenu sur le sommet numéroté 1 est toujours à peu près égal à 25, ce qui peut vouloir dire que la probabilité pour que le mobile se trouve sur le sommet 1 est égale à  $\frac{1}{4}$ .

Effectivement, on a  $P(X_k = 1) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^k$ , ce qui est très proche de  $\frac{1}{4}$  dès que  $k$  est supérieur ou égal à 4 (voir la rubrique « conseils de méthode »).

**Concours d'admission sur classes préparatoires  
Option économique**

**RAPPORT DU JURY  
ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES  
2017**

**Présentation de l'épreuve**

- L'épreuve comportait, comme d'habitude, trois exercices et un problème, ce qui permettait de juger les candidats sur une partie conséquente du programme des classes préparatoires.
- Le sujet balayait largement le programme en donnant, comme d'habitude, une place importante aux probabilités (troisième exercice et problème).

La diversité des thèmes abordés a permis à tous les candidats de s'exprimer et de montrer leurs compétences, ne serait-ce que sur une partie du programme.

- Chaque exercice, problème compris, comportait une ou plusieurs questions d'informatique.
- Dans l'ensemble, les correcteurs ont trouvé le sujet un peu long (comme d'habitude), parcourant une bonne partie du programme d'ECE, équilibré, bien adapté au public concerné (de nombreuses questions étaient faisables), et suffisamment discriminant par la présence de questions techniquement difficiles ou abstraites. Certains ont regretté que, dans le problème, trop de points soient donnés lors de questions répétitives.

**Description du sujet**

**L'exercice 1** proposait la recherche des extrema globaux de la fonction  $f$  définie par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2$$

Une question d'informatique demandait de compléter une fonction Scilab renvoyant  $f(x, y)$ , puis de choisir, parmi trois nappes, laquelle représentait  $f$ .

- Les calculs basiques posent visiblement problème à de nombreux candidats, notamment pour résoudre un système de deux équations.

**L'exercice 2**, portant sur le programme d'algèbre et d'analyse, présentait l'étude de l'endomorphisme  $\varphi$ , qui à tout polynôme  $P$  de  $\mathbb{R}_2[X]$  associe le polynôme  $\varphi(P)$  défini par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, (\varphi(P))(x) = \int_0^1 P(x+t) dt$$

Une question demandait de compléter un script Scilab permettant d'afficher la matrice  $A^n$ , où  $A$  désigne la matrice de  $\varphi$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}_2[X]$ . La fin de l'exercice proposait une méthode de détermination de  $A^n$ .

- Beaucoup de confusions entre les notions suivantes : endomorphisme et automorphisme, inversible et diagonalisable, etc.

**L'exercice 3** portait sur la partie probabilités du programme. On considérait une suite  $X_1, \dots, X_n, \dots$  de variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé, indépendantes et suivant la loi  $\mathcal{E}(1)$ . L'objectif était dans un premier temps d'étudier la variable  $Y_n = \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$ , puis de prouver la convergence en loi de la suite  $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ , avec  $Z_n = Y_n - \ln n$ , vers une variable aléatoire suivant la loi de Gumbel (présentée dès la première question). En amont, une simulation informatique permettait de conjecturer ce résultat.

- La notion de convergence en loi semble floue pour de nombreux candidats.

**Le problème**, portant sur le programme d'algèbre et de probabilité, proposait, dans la première partie, l'étude d'une chaîne de Markov à quatre états.

Les deux parties suivantes avaient pour objectif de calculer la puissance  $n$ -ième de la matrice de cette chaîne, ceci de deux façons différentes.

La dernière partie, très courte, portait sur le programme d'informatique, avec la simulation de la chaîne de Markov étudiée dans la première partie.

- Comme d'habitude, la formule des probabilités totales a été copieusement martyrisée par de nombreux candidats.
- La formule du binôme, pourtant classique, semble rebuter la très grande majorité des candidats. Parmi ceux qui ont tenté de répondre à cette question, beaucoup, certainement peu concentrés, ont fait des fautes impardonnables (oubli du coefficient binomial ou encore faute de calcul), ce qui les a lourdement pénalisés.

### Statistiques

- Pour l'ensemble des 3927 candidats ayant composé, la moyenne obtenue à cette épreuve est égale à 10,697 sur 20 (supérieure de 0,2 point à celle de l'année dernière) et l'écart type vaut 6 (inférieur d'un demi-point à celui de l'année dernière, mais toujours très important).

- 37,2% des candidats, contre 40,3% l'année dernière, ont une note strictement inférieure à 8 (dont 16,4%, ont une note inférieure à 4).

- 19,7% des candidats ont une note comprise entre 8 et 12 (pourcentage supérieur à celui de 2016 qui était égal à 18,2%).

- 24,3% des candidats ont une note supérieure ou égale à 16 (pourcentage inférieur à celui de 2016 qui était égal à 25,8%).

### Conclusion

Comme l'an dernier, le niveau est très hétérogène et l'impression générale ressentie à la lecture des copies amène à penser que les questions les plus subtiles, qui demandent une compréhension fine de la théorie, quel que soit le domaine concerné, échappent à presque tous les candidats. Les meilleurs ont acquis des techniques et des réflexes mais ne comprennent pas forcément ce qu'ils font.

Les copies sont, dans l'ensemble, bien présentées malgré la présence d'un nombre assez élevé de candidats qui ne respectent pas la numérotation des questions, voire même l'oublient, écrivent mal (ce sont souvent les mêmes) et rendent la tâche du correcteur pénible : qu'ils sachent qu'ils n'ont rien à gagner à pratiquer de la sorte, bien au contraire.

Citons également, ceux, en assez grand nombre, qui font de nombreuses fautes de calcul (souvent par manque de concentration) qui perturbent gravement le déroulement du raisonnement et empêchent de trouver le bon résultat voire obligent à tricher pour le trouver ! Pour clore ce paragraphe, les candidats ne doivent pas oublier qu'une épreuve de concours valide deux années d'étude : il faut donc garder en tête les connaissances de première année.

Il reste toujours un noyau de candidats qui ne peuvent s'empêcher de faire du remplissage au lieu d'argumenter face aux questions dont le résultat est donné : aucun correcteur n'est dupe, rappelons-le.

L'investissement en informatique, à peu près stable par rapport à l'année dernière, a permis à de nombreux candidats de glaner des points sans y passer énormément de temps.

Précisons pour les futurs candidats qu'ils ne sont pas obligés de recopier les énoncés des questions avant de les traiter et qu'ils ne sont pas, non plus, obligés de recopier tout un programme d'informatique si la question posée était seulement de compléter quelques instructions manquantes.

Pour finir, il va de soi que, s'il est demandé de compléter une commande `Scilab`, on pénalise très peu si le candidat en écrit plusieurs (pourvu qu'elles répondent à la question).

Rappelons, comme d'habitude, que l'honnêteté, la simplicité, la précision et la rigueur sont des vertus attendues par tous les correcteurs sans exception, et qu'une bonne réponse est toujours une réponse construite rigoureusement.