BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

# Conception : EDHEC

OPTION SCIENTIFIQUE

## MATHÉMATIQUES

2 mai 2017, de 8 h. à 12 h.

*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*
*Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
*Ils ne doivent faire usage d'aucun document. **L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.** Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
*Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.*

---

### Exercice 1

On désigne par $n$ un entier naturel supérieur ou égal à 1 et on considère la fonction $f_n$ définie par :

$$\forall x \in [0,1],\ f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} x^k$$

1) a) Compléter la fonction `Scilab` suivante pour qu'elle renvoie la valeur de $f_n(x)$ à l'appel de `f(x,n)`, où $x$ et $n$ sont donnés par l'utilisateur.

```
function y=f(x,n)
y=sum(------)
endfunction
```

b) Transformer, pour $x \neq 1$, l'expression de $f_n(x)$ puis en déduire une deuxième façon de déclarer `f`, en complétant la déclaration suivante où la fonction est toujours nommée `f` :

```
function y=f(x,n)
  if x==1  then y=------
           else y=------
  end
endfunction
```

2) Montrer que l'équation $f_n(x) = 1$, d'inconnue $x$ élément de $[0,1]$, possède une unique solution $\alpha_n$ dans $[0,1]$.

3) a) Montrer que $f_{n+1}(\alpha_n) \geq 1$ et en déduire que la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

b) En déduire que la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

4) a) Déterminer $\alpha_2$ puis vérifier que $0 \le \alpha_2 < 1$.

b) Utiliser les variations de la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ pour établir que $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n^{n+1} = 0$.

c) En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = \dfrac{1}{2}$.

5) On suppose que $f_n$ a été déclarée (voir question 1) et on considère les commandes supplémentaires suivantes :

```
n=input('entrer la valeur de n : ')
x=0
while f(x,n)<1
x=x+0.001
end
disp(x)
```

Quel est le lien entre le résultat affiché et $\alpha_n$ ?

### Exercice 2

On désigne par $n$ un entier naturel supérieur ou égal à 2 et on considère $n$ variables aléatoires, notées $X_1$, $X_2$, ..., $X_n$, définies sur le même espace probabilisé, indépendantes, et suivant toutes la loi uniforme sur $[0,1]$.

1) On note $M_n$ la variable aléatoire définie par $M_n = \max(X_1, X_2, ..., X_n)$, c'est-à-dire que, pour tout $\omega$ de $\Omega$, on a $M_n(\omega) = \max\left(X_1(\omega), X_2(\omega), ..., X_n(\omega)\right)$. On admet que $M_n$ est une variable aléatoire et on note $F_{M_n}$ sa fonction de répartition.

a) Déterminer, pour tout réel $x$, l'expression de $F_{M_n}(x)$ puis montrer que $M_n$ est une variable à densité.

b) En déduire une densité $f_{M_n}$ de $M_n$.

c) Établir l'existence et donner la valeur de $E(M_n)$ et $E(M_n^2)$.

d) Donner, pour tout $\varepsilon > 0$, un majorant, ne dépendant que de $n$ et $\varepsilon$, de $P\left((M_n - 1)^2 \ge \varepsilon^2\right)$.

e) Conclure que $\lim\limits_{n\to+\infty} P\left(|M_n - 1| \ge \varepsilon\right) = 0$. Que signifie ce résultat ?

2) On pose $Y_n = n(1 - M_n)$.

a) On rappelle que `grand(1,n,'unf',0,1)` simule $n$ variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi uniforme sur [0,1].
Compléter la déclaration de fonction `Scilab` suivante afin qu'elle simule la variable aléatoire $Y_n$.

```
function Y=f(n)
X = grand(1,n,'unf',0,1)
Y =------
endfunction
```

b) Voici deux scripts (celui de droite utilise la fonction `f` définie ci-dessus) :

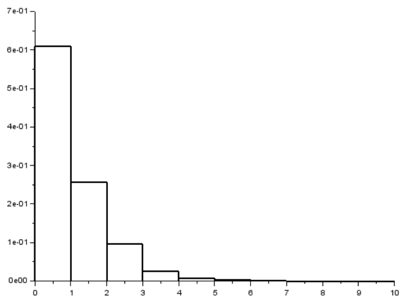
```
e=grand(1,10000,'exp',1)
s=linspace(0,10,11)
histplot(s,e)
```

**Script (1)**

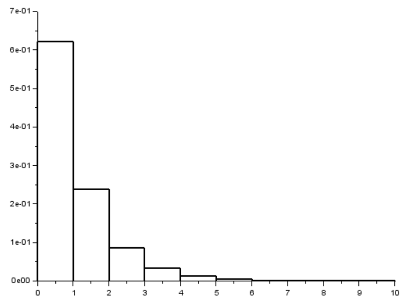
```
n=input('entrez la valeur de n : ')
Y=[]
for k=1:10000
    Y=[Y,f(n)]
end
s=linspace(0,10,11)
histplot(s,Y)
```

**Script (2)**

Chacun de ces scripts simule 10 000 variables indépendantes, regroupe les valeurs renvoyées en 10 classes qui sont les intervalles $[0,1]$, $]1,2]$, $]2,3]$, …, $]9,10]$, et trace l'histogramme correspondant (la largeur de chaque rectangle est égale à 1 et leur hauteur est proportionnelle à l'effectif de chaque classe).
Le script (1) dans lequel les variables aléatoires suivent la loi exponentielle de paramètre 1, renvoie l'histogramme (1) ci-dessous, alors que le script (2) dans lequel les variables aléatoires suivent la même loi que $Y_n$, renvoie l'histogramme (2) ci-dessous, pour lequel on a choisi $n = 1000$.




**Histogramme (1)**




**Histogramme (2) pour $n = 1000$**

Quelle conjecture peut-on émettre quant au comportement de la suite des variables aléatoires $(Y_n)$.

3) a) Déterminer la fonction de répartition $F_{Y_n}$ de la variable $Y_n$ définie à la question 2).

b) Pour tout réel $x$ positif ou nul, calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} F_{Y_n}(x)$.

c) Démontrer le résultat conjecturé à la question 2b).

## Exercice 3

Dans tout l'exercice, $n$ désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

1) Soit $A$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les éléments diagonaux sont égaux à $-n$, les autres étant tous égaux à 1. On note $J$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les éléments sont égaux à 1 et $I$ la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

a) Exprimer $A$ comme combinaison linéaire de $I$ et $J$, puis écrire $A^2$ comme combinaison linéaire de $I$ et $J$.

b) En déduire un polynôme annulateur de $A$ puis donner les valeurs propres possibles de $A$.

c) Montrer que $A$ est inversible.

Dans la suite, on considère un espace euclidien $E$, de dimension $n+1$, dont le produit scalaire est noté $\langle\ ,\ \rangle$ et la norme associée $\|\ \|$.

On note $(\varepsilon_0, \varepsilon_1, ..., \varepsilon_n)$ une base orthonormale de $E$ et on pose :

$$u = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \sum_{k=0}^{n} \varepsilon_k$$

On pose aussi :

$$\forall i \in [\![0, n]\!],\ e_i = \sqrt{\frac{n+1}{n}} \left( \varepsilon_i - \langle \varepsilon_i, u \rangle u \right)$$

2) Calculer la norme du vecteur $u$.

3) a) Montrer que, pour tout $i$ de $[\![0, n]\!]$, on a : $\| e_i \| = 1$.
   b) Montrer également que, pour tout couple $(i, j)$ d'entiers distincts de $[\![0, n]\!]$, on a :

$$\langle e_i, e_j \rangle = -\frac{1}{n}$$

   c) Montrer que les vecteurs $e_0, e_1, ..., e_n$ appartiennent tous au sous-espace $F = \left(\mathrm{Vect}(u)\right)^{\perp}$ de $E$.
   d) Montrer, en utilisant le résultat de la question 1c), que $(e_1, e_2, ..., e_n)$ est une base de $F$.

4) On considère l'application $f$ de $F \times F$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (x, y) \in F \times F,\ f(x, y) = \sum_{k=0}^{n} \langle x, e_k \rangle \langle y, e_k \rangle - \frac{n+1}{n} \langle x, y \rangle$$

   a) Montrer que $f$ est une forme bilinéaire symétrique.
   b) Pour tout couple $(i, j)$ de $[\![1, n]\!]^2$, déterminer $f(e_i, e_j)$ en distinguant les cas $i = j$ et $i \neq j$.
   c) En déduire que :

$$\forall (x, y) \in F \times F,\ \sum_{k=0}^{n} \langle x, e_k \rangle \langle y, e_k \rangle = \frac{n+1}{n} \langle x, y \rangle$$

   d) En déduire également que, pour tout $x$ de $F$, on a :

$$\| x \|^2 = \frac{n}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \langle x, e_k \rangle^2$$

## Problème

Dans ce problème, $n$ désigne un entier naturel non nul et $\mathbb{R}_n[X]$ est l'espace vectoriel formé du polynôme nul et des polynômes à coefficients réels dont le degré est inférieur ou égal à $n$.
On note $\mathcal{B} = (e_0, e_1, ..., e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$. On rappelle que $e_0 = 1$ et que :

$$\forall\, k \in [\![1, n]\!],\ e_k = X^k$$

### *Partie 1 : étude d'une application définie sur $\mathbb{R}_n[X]$*

On considère l'application $\varphi$, qui à tout polynôme $P$ de $\mathbb{R}_n[X]$ associe $\varphi(P) = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}$, où $P^{(k)}$ désigne la dérivée $k^{\text{ème}}$ de $P$ avec la convention $P^{(0)} = P$.

1) Montrer que $\varphi$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

2) a) Calculer $\varphi(e_0)$ et en déduire une valeur propre de $\varphi$.
   b) Montrer que :

$$\forall j \in [\![1, n]\!],\ \varphi(e_j) - e_j \in \mathbb{R}_{j-1}[X]$$

c) En déduire que la matrice de $\varphi$ dans la base $\mathcal{B}$ est triangulaire et que la seule valeur propre de $\varphi$ est celle trouvée à la question précédente.

d) Montrer que $\varphi$ est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

3) a) Pour tout polynôme $P$ de $\mathbb{R}_n[X]$, calculer $\varphi(P-P')$.

b) Déterminer $\varphi^{-1}$ puis écrire la matrice de $\varphi^{-1}$ dans la base $(e_0, e_1, ..., e_n)$.

c) On donne le script Scilab suivant :

```
n=input('entrez la valeur de n : ')
M=eye(n+1,n+1)
for k=1:n
M(k,k+1)=-k
end
A=------
disp(A)
```

Compléter la sixième ligne de ce script pour qu'il affiche la matrice $A$ de $\varphi$ dans la base $(e_0, e_1, ..., e_n)$ lorsque la valeur de $n$ est entrée par l'utilisateur.

***Partie 2 : étude d'une autre application définie sur $\mathbb{R}_n[X]$.***

On désigne par $x$ un réel quelconque.

4) a) Montrer que, pour tout entier naturel $k$, l'intégrale $\int_x^{+\infty} t^k e^{-t} dt$ est convergente.

b) En déduire que, si $P$ est un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$, alors l'intégrale $\int_x^{+\infty} P(t)e^{-t} dt$ est convergente.

5) a) Donner la valeur de $\int_x^{+\infty} e^{-t} dt$

b) Établir que, pour tout entier naturel $k$, on a : $\int_x^{+\infty} t^k e^{-t} dt = k!\sum_{i=0}^{k} \frac{x^i}{i!} e^{-x}$ .

6) Informatique.

a) On admet que, si `u` est un vecteur, la commande `prod(u)` renvoie le produit des éléments de `u` et la commande `cumprod(u)` renvoie un vecteur de même format que `u` dont le $k^{\text{ème}}$ élément est le produit des $k$ premiers éléments de `u`. Utiliser l'égalité obtenue à la question 5b) pour compléter le script Scilab suivant afin qu'il calcule et affiche la variable `s` contenant la valeur de l'intégrale $\int_x^{+\infty} t^k e^{-t} dt$, les valeurs de $x$ et de $k$ étant entrées par l'utilisateur.

```
k=input('entrez la valeur de k : ')
x=input('entrez la valeur de x : ')
p=prod(1:k)
u=------./------
s=p*------*exp(-x)
disp(s)
```

b) Montrer, grâce à un changement de variable simple, que : $\int_x^{+\infty} t^k e^{-t} dt = e^{-x}\int_0^{+\infty} (u+x)^k e^{-u} du$

En déduire la commande manquante du script Scilab suivant afin qu'il permette de calculer et d'afficher une valeur approchée de $\int_x^{+\infty} t^k e^{-t} dt$ grâce à la méthode de Monte Carlo.

```
x=input('entrez la valeur de x : ')
k=input('entrez la valeur de k : ')
Z=grand(1,100 000,'exp',1)
s=exp(-x)*mean(------)
disp(s)
```

On considère maintenant l'application qui, à tout polynôme $P$ de $\mathbb{R}_n[X]$, associe la fonction $F=\psi(P)$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x)=e^{x}\int_{x}^{+\infty} P(t)e^{-t}\,dt$$

7) a) Montrer que $\psi$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

b) Justifier que $F$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}$ et donner une relation entre $F$, $F'$ et $P$.

c) Montrer que $\psi$ est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

8) On considère un polynôme $P$ non nul, vecteur propre de $\psi$ pour une valeur propre $\lambda$ non nulle.

a) Utiliser la relation obtenue à la question 7b) pour établir que : $P'=\dfrac{\lambda-1}{\lambda}P$.

b) En déduire, en considérant les degrés, que $\lambda=1$ est la seule valeur propre possible de $\psi$.

c) Montrer enfin que $\lambda=1$ est la seule valeur propre de $\psi$ (on ne demande pas le sous-espace propre associé).

9) a) Montrer que les endomorphismes $\varphi$ et $\psi$ sont égaux.

b) En déduire que, si $P$ est un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ et s'il existe un réel $a$ tel que, pour tout réel $x$ supérieur ou égal à $a$, on a $P(x)\geq 0$, alors :

$$\forall x \geq a,\ \sum_{i=0}^{n} P^{(i)}(x)\geq 0$$

# Corrigé

## Exercice 1

**1) a)** Le vecteur $\left(x^1, x^2, \ldots, x^n\right)$ est calculé avec la commande `x.^(1:n)`, ensuite on ajoute les éléments de ce vecteur donc la fonction `Scilab` complétée est la suivante :

```
function y=f(x,n)
y=sum(x.^(1:n))
endfunction
```

**b)** On a $f_n(x) = \begin{cases} x \times \dfrac{1-x^n}{1-x} = \dfrac{x - x^{n+1}}{1-x} \text{ si } x \neq 1 \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} 1 = n \text{ si } x = 1 \end{cases}$ donc on peut écrire :

```
function y=f(x,n)
  if x==1 then y=n
         else y=(x-x^(n+1))/(1-x)
  end
endfunction
```

**2)** La fonction $f_n$ est polynomiale donc dérivable et on a : $f_n'(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k x^{k-1}$.

Comme $x \in [0,1]$, $f_n'(x) = 1 + 2x + \ldots + n x^{n-1} \geq 1 > 0$. Par conséquent, $f_n$ est strictement croissante sur $[0,1]$, et comme elle est continue (car dérivable), elle réalise une bijection de $[0,1]$ sur $[0,n]$. Comme 1 appartient à $[0,n]$, l'équation $f_n(x) = 1$ possède une unique solution $\alpha_n$ dans $[0,1]$.

**3) a)** On a $f_{n+1}(\alpha_n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \alpha_n^k = \sum_{k=1}^{n} \alpha_n^k + \alpha_n^{n+1} = f_n(\alpha_n) + \alpha_n^{n+1} = 1 + \alpha_n^{n+1}$.

Comme $\alpha_n \geq 0$, on trouve bien :

$$\boxed{f_{n+1}(\alpha_n) \geq 1}$$

On a $f_{n+1}(\alpha_n) \geq 1$ et, par définition de $\alpha_{n+1}$, on a $f_{n+1}(\alpha_{n+1}) = 1$ donc on en déduit : $f_{n+1}(\alpha_n) \geq f_{n+1}(\alpha_{n+1})$.

Comme $f_{n+1}$ est strictement croissante, on obtient : $\alpha_n \geq \alpha_{n+1}$.

Conclusion :

$$\boxed{(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ est décroissante}}$$

**b)** La suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et minorée (par 0) donc elle converge.

**4) a)** $\alpha_2$ est la solution de l'équation $x+x^2=1$ sur $[0,1]$. Cette équation s'écrit $x^2+x-1=0$ et ses solutions sont : $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. Comme la première de ces deux solutions est strictement négative, on conclut :

$$\boxed{\alpha_2=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}$$

On a $\sqrt{5}<\sqrt{9}$ donc $\alpha_2<\frac{-1+3}{2}$, c'est-à-dire $\alpha_2<1$. On sait depuis la question 2) que $\alpha_2$ appartient à $[0,1]$ donc on a bien :

$$\boxed{0\leq\alpha_2<1}$$

**b)** La suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante donc, pour tout entier naturel $n$ supérieur ou égal à 2, on a : $0\leq\alpha_n\leq\alpha_2$ et, par croissance de la fonction $t\mapsto t^{n+1}$ sur $\mathbb{R}_+$, on obtient : $0\leq\alpha_n^{n+1}\leq\alpha_2^{n+1}$. On a montré à la question 4a) que $|\alpha_2|<1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha_2^{n+1}=0$. Par encadrement, on en déduit :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\alpha_n^{n+1}=0}$$

**c)** En revenant à la définition de $\alpha_n$, on sait que $f_n(\alpha_n)=1$, et comme $\alpha_n$ est différent de 1, on a $\frac{\alpha_n-\alpha_n^{n+1}}{1-\alpha_n}=1$, ce qui s'écrit aussi $\alpha_n-\alpha_n^{n+1}=1-\alpha_n$, ou encore : $2\alpha_n-1=\alpha_n^{n+1}$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha_n^{n+1}=0$, on trouve $\lim\limits_{n\to+\infty}(2\alpha_n-1)=0$, d'où :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\alpha_n=\frac{1}{2}}$$

**5)** Le script proposé cherche la première valeur de $x$ pour laquelle on a $f_n(x)\geq 1$ ce qui implique que celle d'avant (c'est $x-0,001$) était telle que $f_n(x-0,001)<1$. On a donc : $f_n(x-0,001)<1\leq f_n(x)$. En remplaçant 1 par $f_n(\alpha_n)$, on obtient : $f_n(x-0,001)<f_n(\alpha_n)\leq f_n(x)$.
Par stricte croissance de $f_n$, on a : $x-0,001<\alpha_n\leq x$.
Conclusion :

$$\boxed{\text{Le script proposé donne une valeur approchée de } \alpha_n \text{ à 0,001 près par excès}}$$

## Exercice 2

**1) a)** Dire que la variable prenant la plus grande des valeurs prises par $X_1,...,X_n$ (il s'agit de $M_n$) prend une valeur inférieure ou égale à *x*, c'est dire que chacune des variables $X_1,...,X_n$ a pris une valeur inférieure ou égale à *x* (sinon, $M_n$ ne serait pas inférieure ou égal à *x*). on a donc :

$$F_{M_n}(x)=P(M_n\leq x)=P\left(\bigcap_{k=1}^{n}[X_k\leq x]\right)$$

Comme $X_1$, $X_2$, ..., $X_n$ sont mutuellement indépendantes, on obtient :

$$F_{M_n}(x)=\prod_{k=1}^{n}P(X_k\leq x)=\prod_{k=1}^{n}F_{X_k}(x)$$

Les variables $X_k$ suivent toutes la même loi donc : $F_{M_n}(x)=\left(F_{X_1}(x)\right)^n$.

La loi de $X_1$ est la loi uniforme sur $[0,1]$ donc $F_{X_1}(x)=\begin{cases}0 \text{ si } x<0\\ x \text{ si } 0\leq x\leq 1\\ 1 \text{ si } x>1\end{cases}$

Bilan :

$$\boxed{F_{M_n}(x)=\begin{cases}0 \text{ si } x<0\\ x^n \text{ si } 0\leq x\leq 1\\ 1 \text{ si } x>1\end{cases}}$$

Les restrictions de $F_{M_n}$ aux intervalles $]-\infty,0[$ , $]1,+\infty[$ sont de classe $C^1$ (donc continues) en tant que fonctions constantes et la restriction de $F_{M_n}$ à l'intervalle $[0,1]$ est de classe $C^1$ (donc continue) en tant que fonction polynomiale (pas si "poly" que ça d'ailleurs).

De plus $\lim\limits_{x\to 0^-}F_{M_n}(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}0=0$ et $\lim\limits_{x\to 0^+}F_{M_n}(x)=F_{M_n}(0)=0$.

Bilan : la fonction $F_{M_n}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et elle est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}$, sauf peut-être en 0, donc $M_n$ est une variable à densité.

**b)** On dérive $F_{M_n}$ sauf en 0 et en 1, ce qui donne : $F_{M_n}{}'(x)=\begin{cases}0 \text{ si } x<0\\ nx^{n-1} \text{ si } 0<x<1\\ 0 \text{ si } x>1\end{cases}$.

En posant, par exemple, $f_{M_n}(0)=0$ et $f_{M_n}(1)=n$, on obtient une densité $f_{M_n}$ de $M_n$ définie par :

$$\boxed{f_{M_n}(x)=\begin{cases}0 \text{ si } x<0\\ nx^{n-1} \text{ si } 0\leq x\leq 1\\ 0 \text{ si } x>1\end{cases}}$$

**c)** • Les variables $M_n$ et $M_n^2$ sont positives et inférieures ou égales à 1 donc, par domination, $E(M_n)$ et $E(M_n^2)$ existent (car la variable certaine égale à 1 possède une espérance et un moment d'ordre 2).

• De plus, comme $f_{M_n}$ est nulle ailleurs que sur $[0,1]$, on a :

$$E(M_n)=\int_0^1 x\times nx^{n-1}dx=\int_0^1 nx^n dx=\left[\frac{n}{n+1}x^{n+1}\right]_0^1$$

Par conséquent :

$$\boxed{E(M_n)=\frac{n}{n+1}}$$

• De même, on a $E(M_n^2)=\int_0^1 x^2\times nx^{n-1}dx=\int_0^1 nx^{n+1}dx=\left[\frac{n}{n+2}x^{n+2}\right]_0^1$.

Par conséquent :

$$\boxed{E(M_n^2)=\frac{n}{n+2}}$$

**d)** En appliquant l'inégalité de Markov à la variable $(M_n-1)^2$ qui a une espérance (car $E(M_n)$ et $E(M_n^2)$ existent) et qui est bien positive, on trouve, pour tout $\varepsilon>0$ :

$$P\left((M_n-1)^2\geq\varepsilon^2\right)\leq\frac{E\left((M_n-1)^2\right)}{\varepsilon^2}$$

En développant, on a : $E\left((M_n-1)^2\right)=E(M_n^2-2M_n+1)$ et, par linéarité de l'espérance, on trouve : $E\left((M_n-1)^2\right)=E(M_n^2)-2E(M_n)+1$.

En remplaçant par les expressions trouvées plus haut, on a :

$$E\left((M_n-1)^2\right)=\frac{n}{n+2}-2\times\frac{n}{n+1}+1=\frac{n(n+1)-2n(n+2)+(n+1)(n+2)}{(n+1)(n+2)}$$

Après simplifications : $E\left((M_n-1)^2\right)=\dfrac{2}{(n+1)(n+2)}$

Finalement :

$$\boxed{\forall\varepsilon>0,\ P\left((M_n-1)^2\geq\varepsilon^2\right)\leq\frac{2}{(n+1)(n+2)\varepsilon^2}}$$

**e)** La fonction "racine carrée" est une bijection croissante de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$ donc on a l'égalité des événements $\left((M_n-1)^2\geq\varepsilon^2\right)$ et $\left(\sqrt{(M_n-1)^2}\geq\sqrt{\varepsilon^2}\right)$ :

L'inclusion $\subset$ est assurée par la croissance de la fonction "racine carrée" et l'inclusion $\supset$ est assurée par la croissance de la fonction "carré".

On obtient donc : $\left( (M_n - 1)^2 \geq \varepsilon^2 \right) = \left( |M_n - 1| \geq |\varepsilon| \right)$.

Comme $\varepsilon > 0$, il reste : $\left( (M_n - 1)^2 \geq \varepsilon^2 \right) = \left( |M_n - 1| \geq \varepsilon \right)$.

Avec la question 1d), on trouve :

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ P\left( |M_n - 1| \geq \varepsilon \right) \leq \frac{2}{(n+1)(n+2)\varepsilon^2}}$$

Une probabilité étant positive, on a l'encadrement :

$$0 \leq P\left( |M_n - 1| \geq \varepsilon \right) \leq \frac{2}{(n+1)(n+2)\varepsilon^2}$$

Par encadrement, on conclut :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} P\left( |M_n - 1| \geq \varepsilon \right) = 0}$$

Ce résultat signifie que la suite $(M_n)$ converge en probabilité vers la variable certaine égale à 1.

**2) a)** Avec le rappel fait, il n'y a pas trop de mystère :

```
function Y=f(n)
x = grand(1,n,'unf',0,1)
Y =n*(1-max(x))
endfunction
```

**b)** Comme les histogrammes se ressemblent pour une grande valeur de *n*, on peut penser que, si *n* est assez grand, la loi de $Y_n$ est "proche" de la loi d'une variable *Z* suivant la loi exponentielle de paramètre 1. Plus précisément :

- La hauteur du premier rectangle de l'histogramme (1) donne une valeur approchée de $F_Z(1)$, la hauteur du premier rectangle de l'histogramme (2) donne une valeur approchée de $F_{Y_n}(1)$. On en déduit $F_Z(1) \approx F_{Y_n}(1)$.
- La hauteur du deuxième rectangle de l'histogramme (1) donne une valeur approchée de $F_Z(2) - F_Z(1)$, la hauteur du deuxième rectangle de l'histogramme (2) donne une valeur approchée de $F_{Y_n}(2) - F_{Y_n}(1)$. On en déduit $F_Z(2) \approx F_{Y_n}(2)$.
- Et ainsi de suite.

On peut donc conjecturer que la suite $(Y_n)$ converge en loi vers une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre 1.

**3) a)** Pour commencer, comme $M_n(\Omega) = [0,1]$, on a $Y_n(\Omega) = [0,n]$.

Ensuite, par définition, on a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_{Y_n}(x) = P(Y_n \leq x) = P\left(n(1 - M_n) \leq x\right)$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $F_{Y_n}(x) = P\left(1 - M_n \leq \dfrac{x}{n}\right) = P\left(M_n \geq 1 - \dfrac{x}{n}\right) = 1 - F_{M_n}\left(1 - \dfrac{x}{n}\right)$.

On remplace selon que $1-\frac{x}{n}<0$, $0\leq 1-\frac{x}{n}\leq 1$ ou $1-\frac{x}{n}>1$, c'est-à-dire selon que $x>n$, $0\leq x\leq n$ ou $x<0$.
On trouve :

$$\boxed{F_{Y_n}(x)=\begin{cases}0 \text{ si } x<0\\ 1-\left(1-\frac{x}{n}\right)^n \text{ si } 0\leq x\leq n\\ 1 \text{ si } x>n\end{cases}}$$

**b)** Pour tout $x\geq 0$, on a $x\leq n$, dès que $n$ est assez grand, et ainsi :

$$F_{Y_n}(x)=1-\left(1-\frac{x}{n}\right)^n$$

De plus, pour tout $n$ strictement supérieur à $x$, $\ln\left(1-\frac{x}{n}\right)$ existe et on a :

$$F_{Y_n}(x)=1-\exp\left(n\ln\left(1-\frac{x}{n}\right)\right)$$

• Si $x=0$, on a $F_{Y_n}(x)=0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}F_{Y_n}(x)=0$.

• Si $x>0$, alors comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{x}{n}=0$, on a : $\ln\left(1-\frac{x}{n}\right)\underset{+\infty}{\sim}-\frac{x}{n}$ ($x$ n'est pas nul donc l'équivalent est correct).
On en déduit $n\ln\left(1-\frac{x}{n}\right)\underset{+\infty}{\sim}-x$ et ainsi : $\lim\limits_{n\to+\infty}n\ln\left(1-\frac{x}{n}\right)=-x$.
Par continuité de la fonction exponentielle en $-x$, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\frac{x}{n}\right)^n=e^{-x}$. On en déduit : $\lim\limits_{n\to+\infty}F_{Y_n}(x)=1-e^{-x}$
En regroupant les résultats des deux points précédents, on conclut :

$$\boxed{\forall x\geq 0,\ \lim_{n\to+\infty}F_{Y_n}(x)=1-e^{-x}}$$

**c)** Pour tout $x$ strictement négatif, on a $F_{Y_n}(x)=0$ donc :

$$\boxed{\forall x<0,\ \lim_{n\to+\infty}F_{Y_n}(x)=0}$$

D'après les deux limites encadrées ci-dessus, on peut conclure que la suite $(Y_n)$ converge en loi vers une variable suivant la loi exponentielle de paramètre 1.

## Exercice 3 ..........................................................................

**1) a)** On a $A=\begin{pmatrix} -n & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & -n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & (1) & \vdots \\ \vdots & (1) & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} n+1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & n+1 \end{pmatrix}$.

On en déduit :

$$\boxed{A=J-(n+1)I}$$

On trouve ensuite (et c'est classique) que $J^2=nJ$ et, comme $I$ et $J$ commutent, on en déduit $A^2=J^2-2(n+1)J+(n+1)^2I^2=nJ-2(n+1)J+(n+1)^2I$.
En simplifiant :

$$\boxed{A^2=(n+1)^2I-(n+2)J}$$

**b)** En remplaçant $J$ par $A+(n+1)I$, on obtient :
$A^2=(n+1)^2I-(n+2)(A+(n+1)I)=\big((n+1)^2-(n+1)(n+2)\big)I-(n+2)A$.
On a donc :

$$\boxed{A^2=-(n+1)I-(n+2)A}$$

Un polynôme annulateur de $A$ est donc :

$$\boxed{X^2+(n+2)X+(n+1)}$$

On sait que les racines de ce polynôme sont les valeurs propres possibles de $A$, ce qui montre que les valeurs propres possibles de $A$ sont : $-1$ et $-n-1$.

**c)** Comme 0 n'est pas valeur propre de $A$ (les seules possibles étant $-1$ et $-n-1\leq -1$), on est certain que :

$$\boxed{A \text{ est inversible}}$$

**2)** On a, par bilinéarité du produit scalaire (pour les 3ème et 4ème égalités) :

$$\|u\|^2=\langle u,u\rangle=\left\langle \frac{1}{\sqrt{n+1}}\sum_{i=0}^{n}\varepsilon_i,\frac{1}{\sqrt{n+1}}\sum_{j=0}^{n}\varepsilon_j\right\rangle=\frac{1}{n+1}\left\langle\sum_{i=0}^{n}\varepsilon_i,\sum_{j=0}^{n}\varepsilon_j\right\rangle=\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\langle\varepsilon_i,\varepsilon_j\rangle$$

Comme la base $(\varepsilon_0,\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)$ est une base orthonormale de $E$, les produits scalaires $\langle\varepsilon_i,\varepsilon_j\rangle$ sont nuls si $i\neq j$ et valent 1 si $i=j$ donc il reste :

$$\|u\|^2=\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}\langle\varepsilon_i,\varepsilon_i\rangle=\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}1=1$$

Par conséquent, comme une norme est positive :

$$\boxed{\|u\|=1}$$

**3) a)** On a $\| e_i \|^2 = \langle e_i, e_i \rangle = \left\langle \sqrt{\dfrac{n+1}{n}} \left( \varepsilon_i - \langle \varepsilon_i, u \rangle u \right), \sqrt{\dfrac{n+1}{n}} \left( \varepsilon_i - \langle \varepsilon_i, u \rangle u \right) \right\rangle$

Par bilinéarité, on obtient : $\| e_i \|^2 = \dfrac{n+1}{n} \left\langle \left( \varepsilon_i - \langle \varepsilon_i, u \rangle u \right), \left( \varepsilon_i - \langle \varepsilon_i, u \rangle u \right) \right\rangle$

Et encore par bilinéarité :

$$\| e_i \|^2 = \frac{n+1}{n} \left( \| \varepsilon_i \|^2 - \langle \varepsilon_i, u \rangle \langle u, \varepsilon_i \rangle - \langle \varepsilon_i, u \rangle \langle \varepsilon_i, u \rangle + \langle \varepsilon_i, u \rangle^2 \| u \|^2 \right)$$

Par symétrie du produit scalaire, on peut simplifier :

$$\| e_i \|^2 = \frac{n+1}{n} \left( \| \varepsilon_i \|^2 - 2 \langle \varepsilon_i, u \rangle^2 + \langle \varepsilon_i, u \rangle^2 \| u \|^2 \right)$$

Comme $\| u \|^2 = 1$ et $\| \varepsilon_i \|^2 = 1$, il reste : $\| e_i \|^2 = \dfrac{n+1}{n} \left( 1 - \langle \varepsilon_i, u \rangle^2 \right)$

Pour finir, on calcule $\langle \varepsilon_i, u \rangle$ :

$$\langle \varepsilon_i, u \rangle = \left\langle \varepsilon_i, \frac{1}{\sqrt{n+1}} \sum_{j=0}^{n} \varepsilon_j \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \sum_{j=0}^{n} \langle \varepsilon_i, \varepsilon_j \rangle = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \langle \varepsilon_i, \varepsilon_i \rangle = \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

En remplaçant dans $\| e_i \|^2$, on trouve : $\| e_i \|^2 = \dfrac{n+1}{n} \left( 1 - \dfrac{1}{n+1} \right)$.

Conclusion :

$$\boxed{\forall i \in [\![0, n]\!],\ \| e_i \| = 1}$$

**b)** De la même façon, on a :

$$\langle e_i, e_j \rangle = \left\langle \sqrt{\frac{n+1}{n}} \left( \varepsilon_i - \langle \varepsilon_i, u \rangle u \right), \sqrt{\frac{n+1}{n}} \left( \varepsilon_j - \langle \varepsilon_j, u \rangle u \right) \right\rangle$$

En développant par bilinéarité, on obtient :

$$\langle e_i, e_j \rangle = \frac{n+1}{n} \left( \langle \varepsilon_i, \varepsilon_j \rangle - \langle \varepsilon_i, u \rangle \langle u, \varepsilon_j \rangle - \langle \varepsilon_j, u \rangle \langle \varepsilon_i, u \rangle + \langle \varepsilon_i, u \rangle \langle \varepsilon_j, u \rangle \| u \|^2 \right)$$

Par orthogonalité de la base $(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$, on a $\langle \varepsilon_i, \varepsilon_j \rangle = 0$, on a toujours $\| u \|^2 = 1$, et comme précédemment, on a $\langle \varepsilon_i, u \rangle = \langle \varepsilon_j, u \rangle = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$, donc il reste :

$$\langle e_i, e_j \rangle = \frac{n+1}{n} \left( 0 - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} \right)$$

En conclusion, pour tout couple $(i, j)$ d'entiers distincts de $[\![0, n]\!]$, on a :

$$\boxed{\langle e_i, e_j \rangle = -\frac{1}{n}}$$

**c)** On a : $\langle e_i, u \rangle = \left\langle \sqrt{\dfrac{n+1}{n}} \left( \varepsilon_i - \langle \varepsilon_i, u \rangle u \right), u \right\rangle = \sqrt{\dfrac{n+1}{n}} \left\langle \left( \varepsilon_i - \langle \varepsilon_i, u \rangle u \right), u \right\rangle$.

$\langle e_i, u \rangle = \sqrt{\dfrac{n+1}{n}} \left( \langle \varepsilon_i, u \rangle - - \langle \varepsilon_i, u \rangle \| u \|^2 \right) = \sqrt{\dfrac{n+1}{n}} \left( \langle \varepsilon_i, u \rangle - - \langle \varepsilon_i, u \rangle \right)$, car $\| u \|^2 = 1$.

Finalement, on trouve $\langle e_i , u \rangle = 0$, et ainsi :

$$\boxed{\forall i \in [\![0,n]\!],\ e_i \in \left(\mathrm{Vect}(u)\right)^{\perp}}$$

**d)** Montrons que $(e_1, e_2, ..., e_n)$ est libre. Soit donc *n* réels $\alpha_1,\ \alpha_2, ..., \alpha_n$ tels que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i = 0$. On en déduit :

$$\forall k \in [\![1,n]\!],\ \left\langle e_k\ ,\ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \right\rangle = 0$$

En développant on obtient (bilinéarité toujours) $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \langle e_k , e_i \rangle = 0$, et en se souvenant que $\| e_i \| = 1$, et pour $i \neq j$ $\langle e_i , e_j \rangle = -\frac{1}{n}$, on a : $\alpha_k - \frac{1}{n} \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{n} \alpha_i = 0$.

En multipliant par $-n$, on obtient : $\forall k \in [\![1,n]\!],\ \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{n} \alpha_i - n\alpha_k = 0$.

Matriciellement, ceci s'écrit : $\begin{pmatrix} -n & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & -n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, soit $A \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

Comme *A* est inversible, ce système possède la seule solution

$$\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$$

Conclusion : la famille $(e_1, e_2, ..., e_n)$ est une famille libre de *F*.

Pour finir, comme $\dim E = n+1$ et $\dim \mathrm{Vect}(u) = 1$, on a $\dim\left(\mathrm{Vect}(u)\right)^{\perp} = n$.

Par conséquent, $(e_1, e_2, ..., e_n)$ est une famille libre de *n* vecteurs de *F*, qui est de dimension *n*, donc :

$$\boxed{(e_1, e_2, ..., e_n) \text{ est une base de } F}$$

**4) a)** • Tout d'abord, on note que $f(x, y)$ est un réel.

• Montrons que *f* est linéaire à gauche. Soit donc un réel $\lambda$ et trois vecteurs $x_1$, $x_2$ et *y* de *F*. On a :

$$f(\lambda x_1 + x_2, y) = \sum_{k=0}^{n} \langle \lambda x_1 + x_2 , e_k \rangle \langle y , e_k \rangle - \frac{n+1}{n} \langle \lambda x_1 + x_2 , y \rangle$$

Par bilinéarité du produit scalaire, on obtient :

$$f(\lambda x_1 + x_2, y) = \sum_{k=0}^{n} (\lambda \langle x_1 , e_k \rangle + \langle x_2 , e_k \rangle) \langle y , e_k \rangle - \frac{n+1}{n} (\lambda \langle x_1 , y \rangle + \langle x_2 , y \rangle)$$

En scindant les sommes, on a :

$$f(\lambda x_1+x_2,y)=\lambda\sum_{k=0}^{n}\langle x_1,e_k\rangle\langle y,e_k\rangle+\sum_{k=0}^{n}\langle x_2,e_k\rangle\langle y,e_k\rangle-\lambda\times\frac{n+1}{n}\langle x_1,y\rangle-\frac{n+1}{n}\langle x_2,y\rangle$$

En regroupant les termes en λ, on a :

$f(\lambda x_1+x_2,y)=$

$$\lambda\left(\sum_{k=0}^{n}\langle x_1,e_k\rangle\langle y,e_k\rangle-\frac{n+1}{n}\langle x_1,y\rangle\right)+\left(\sum_{k=0}^{n}\langle x_2,e_k\rangle\langle y,e_k\rangle-\frac{n+1}{n}\langle x_2,y\rangle\right)$$

Finalement, on a $f(\lambda x_1+x_2,y)=\lambda f(x_1,y)+f(x_2,y)$, ce qui prouve que *f* est linéaire à gauche.

- Montrons que *f* est symétrique. On a :

$$f(x,y)=\sum_{k=0}^{n}\langle x,e_k\rangle\langle y,e_k\rangle-\frac{n+1}{n}\langle x,y\rangle \text{ et } f(y,x)=\sum_{k=0}^{n}\langle y,e_k\rangle\langle x,e_k\rangle-\frac{n+1}{n}\langle y,x\rangle$$

Ainsi, par commutativité de la multiplication et symétrie du produit scalaire, on a : $f(y,x)=f(x,y)$.

Conclusion : *f* est une forme, linéaire à gauche et symétrique donc :

$$\boxed{f \text{ est une forme bilinéaire symétrique}}$$

**b)** • Pour $i=j$ :

$$f(e_i,e_i)=\sum_{k=0}^{n}\langle e_i,e_k\rangle\langle e_i,e_k\rangle-\frac{n+1}{n}\langle e_i,e_i\rangle=\sum_{k=0}^{n}\langle e_i,e_k\rangle^2-\frac{n+1}{n}\|e_i\|^2.$$

Dans la somme, il y a un terme $\langle e_i,e_i\rangle^2$ qui vaut $\|e_i\|^2=1$ et les $n-1$ autres valent $\left\langle e_i,e_j\right\rangle=-\frac{1}{n}$. On en déduit :

$$f(e_i,e_i)=1+\sum_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{n}\frac{1}{n^2}-\frac{n+1}{n}=1+n\times\frac{1}{n^2}-\frac{n+1}{n}=1+\frac{1}{n}-\frac{n+1}{n}$$

Bilan :

$$\boxed{f(e_i,e_i)=0}$$

- Pour $i\neq j$ :

$$f\left(e_i,e_j\right)=\sum_{k=0}^{n}\langle e_i,e_k\rangle\left\langle e_j,e_k\right\rangle-\frac{n+1}{n}\left\langle e_i,e_j\right\rangle$$

Dans la somme, il y a deux termes $\langle e_i,e_i\rangle\left\langle e_j,e_i\right\rangle$ et $\left\langle e_i,e_j\right\rangle\left\langle e_j,e_j\right\rangle$ qui valent $-\frac{1}{n}$ et les $n-1$ autres valent $\left\langle e_i,e_j\right\rangle=-\frac{1}{n}$. On en déduit :

$$f\left(e_i,e_j\right)=-\frac{2}{n}+\sum_{\substack{k=0\\k\neq i\\k\neq j}}^{n}\frac{1}{n^2}-\frac{n+1}{n}\times\left(-\frac{1}{n}\right)=-\frac{2n}{n^2}+\frac{n-1}{n^2}+\frac{n+1}{n^2}$$

Bilan :

$$\boxed{f\left(e_i,e_j\right)=0}$$

**c)** Comme $(e_1,e_2,...,e_n)$ est une base de *F*, on peut écrire, pour tout *x* et tout *y* de *F* : $x=\sum_{i=1}^{n}x_ie_i$ et $x=\sum_{i=1}^{n}y_ie_i$.

Dès lors, par bilinéarité de *f*, on a :

$$f(x,y)=f\left(\sum_{i=1}^{n}x_ie_i,\sum_{j=1}^{n}y_je_j\right)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}x_iy_jf(e_i,e_j)$$

D'après la question 4b), on a donc : $\forall(x,y)\in F\times F$, $f(x,y)=0$.

Par définition de *f*, ceci signifie :

$$\boxed{\forall(x,y)\in F\times F,\ \sum_{k=0}^{n}\langle x,e_k\rangle\langle y,e_k\rangle=\frac{n+1}{n}\langle x,y\rangle}$$

**d)** L'égalité précédente étant valable pour tout *x* et pour tout *y* de *F*, on peut l'appliquer avec $y=x$, ce qui donne :

$$\sum_{k=0}^{n}\langle x,e_k\rangle^2=\frac{n+1}{n}\|x\|^2$$

En multipliant chaque membre par $\frac{n}{n+1}$, on trouve :

$$\boxed{\|x\|^2=\frac{n}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\langle x,e_k\rangle^2}$$

## Problème ..............................................................................

***Partie 1 : étude d'une application définie sur $\mathbb{R}_n[X]$***

**1)** • Pour tous polynômes *P* et *Q* de $\mathbb{R}_n[X]$ et pour tout réel λ, on a :

$$\varphi(P+\lambda Q)=\sum_{k=0}^{n}(P+\lambda Q)^{(k)}$$

Par linéarité de la dérivation, on obtient :

$$\varphi(P+\lambda Q)=\sum_{k=0}^{n}\left(P^{(k)}+\lambda Q^{(k)}\right)=\sum_{k=0}^{n}P^{(k)}+\lambda\sum_{k=0}^{n}Q^{(k)}=\varphi(P)+\lambda\varphi(Q)$$

L'application φ est donc linéaire.

• De plus, si *P* est un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$, c'est-à-dire un polynôme de degré inférieur ou égal à *n*, alors $P,P',...,P^{(n)}$ sont encore des polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ donc, par stabilité de $\mathbb{R}_n[X]$ par l'addition, $\varphi(P)$ appartient à $\mathbb{R}_n[X]$.

Conclusion :

$$\boxed{\varphi \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}_n[X]}$$

**2) a)** On a $\varphi(e_0)=\sum_{k=0}^{n} e_0^{(k)}$ et comme $e_0$ est constant (égal à 1), les dérivées $e_0^{(k)}$, pour $k$ appartenant à $[\![1,n]\!]$, sont nulles et il reste le seul terme $e_0^{(0)}=e_0$ :

$$\boxed{\varphi(e_0)=e_0}$$

Comme $e_0$ n'est pas nul, l'égalité précédente prouve que :

$$\boxed{\text{1 est une valeur propre de } \varphi}$$

**b)** On a $\varphi(e_j)-e_j=\sum_{k=0}^{n} e_j^{(k)}-e_j=\sum_{k=1}^{n} e_j^{(k)}$.

Comme $\deg(e_j)=j$, les dérivées $e_j^{(k)}$, pour $k$ appartenant à $[\![1,n]\!]$, sont, soit nulles (si $k>j$), soit de degré inférieur ou égal à $j-1$ (si $1\le k\le j$). Par conséquent :

$$\boxed{\forall j\in[\![1,n]\!],\ \varphi(e_j)-e_j\in\mathbb{R}_{j-1}[X]}$$

**c)** Le résultat de la question précédente s'écrit pour tout $j$ de $[\![1,n]\!]$, $\varphi(e_j)=e_j+Q_{j-1}$, où $Q_{j-1}\in\mathbb{R}_{j-1}[X]$, soit $\varphi(e_j)=e_j+\sum_{k=0}^{j-1}\alpha_k\, e_k$, et ainsi, la colonne donnant $\varphi(e_j)$ s'écrit $\begin{pmatrix}\alpha_0\\ \vdots\\ \alpha_{j-1}\\ 1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$, le terme égal à 1 étant sur la diagonale de la matrice. Par conséquent, la matrice de $\varphi$ dans la base $\mathcal{B}=(e_0, e_1, ..., e_n)$ est de la forme $\begin{pmatrix}1 & \times & \dots & \times\\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & (0) & \ddots & \times\\ 0 & \dots & 0 & 1\end{pmatrix}$ : ceci montre qu'elle est triangulaire et que, comme les valeurs propres d'une matrice triangulaire sont ses éléments diagonaux, alors :

$$\boxed{\text{La seule valeur propre de } \varphi \text{ est 1}}$$

**d)** 0 n'est pas valeur propre de $\varphi$ donc $\varphi$ est injectif, et en tant qu'endomorphisme d'un espace de dimension finie, $\varphi$ est bijectif.

Conclusion :

$$\boxed{\varphi \text{ est un automorphisme de } \mathbb{R}_n[X]}$$

**Remarque.** On pouvait aussi écrire : la matrice de $\varphi$ dans $\mathcal{B}$ est triangulaire, sans élément diagonal nul donc elle est inversible, et ainsi, $\varphi$ est bijectif.

**3) a)** Par linéarité de φ, on a $\varphi(P-P') = \varphi(P) - \varphi(P') = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)} - \sum_{k=0}^{n} P^{(k+1)}$.

Par "télescopage", il reste : $\varphi(P-P') = P - P^{(n+1)}$.

Comme $P$ appartient à $\mathbb{R}_n[X]$, la dérivée $P^{(n+1)}$ est nulle et on a :

$$\boxed{\varphi(P-P') = P}$$

**b)** En composant l'égalité précédente par $\varphi^{-1}$ (qui existe car φ est bijectif), on obtient $\varphi^{-1}(\varphi(P-P')) = \varphi^{-1}(P)$, soit :

$$(\varphi^{-1} \circ \varphi)(P-P') = \varphi^{-1}(P)$$

Comme $\varphi^{-1} \circ \varphi = Id_{\mathbb{R}_n[X]}$, on a :

$$\boxed{\varphi^{-1}(P) = P - P'}$$

On en déduit $\varphi^{-1}(e_0) = e_0$ et, pour tout $j$ de $[\![1,n]\!]$ : $\varphi^{-1}(e_j) = e_j - e_j' = e_j - je_{j-1}$

La matrice de $\varphi^{-1}$ dans la base $\mathcal{B}$ est donc :

$$\boxed{M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -n \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

**c)** Le script `Scilab` proposé construit la matrice `M` comme la matrice identité à laquelle sont ajoutés les termes juste au-dessus de la diagonale qui valent $-1$, $-2$, …, $-n$. On en déduit que `M` est la matrice de $\varphi^{-1}$ dans la base $\mathcal{B}$.

La matrice de φ est l'inverse de celle de $\varphi^{-1}$ donc on complète la ligne ainsi :

```
A = M^-1
```

***Partie 2***

**4) a)** L'intégrale $\int_x^{+\infty} t^k e^{-t} dt$ est le reste de l'intégrale convergente $\Gamma(k+1)$ donc :

$$\boxed{\int_x^{+\infty} t^k e^{-t} dt \text{ est convergente}}$$

**b)** En écrivant $P(t)=\sum_{k=0}^{n} a_k t^k$ , il apparaît que l'intégrale $\int_x^{+\infty} P(t)\,e^{-t}dt$ est une combinaison linéaire des intégrales $\int_x^{+\infty} t^k e^{-t}dt$ qui sont convergentes, donc :

$$\boxed{\int_x^{+\infty} P(t)\,e^{-t}dt \text{ est convergente}}$$

**5) a)** On a $\int_x^{+\infty} e^{-t}dt = \lim\limits_{A\to+\infty}\int_x^{A} e^{-t}dt = \lim\limits_{A\to+\infty}\left[-e^{-t}\right]_x^A = \lim\limits_{A\to+\infty}\left(-e^{-A}+e^{-x}\right)$.

Comme $\lim\limits_{A\to+\infty} e^{-A}=0$, on obtient :

$$\boxed{\int_x^{+\infty} e^{-t}dt = e^{-x}}$$

**b)** Procédons par récurrence :

- Pour $k=0$, on a $\int_x^{+\infty} t^0 e^{-t}dt = \int_x^{+\infty} e^{-t}dt = e^{-x}$ et $0!\sum_{i=0}^{0}\frac{x^i}{i!}e^{-x} = 0!\times\frac{x^0}{0!}e^{-x}=e^{-x}$

donc on a bien : $\int_x^{+\infty} t^0 e^{-t}dt = 0!\sum_{i=0}^{0}\frac{x^i}{i!}e^{-x}$

- Supposons que, pour un certain entier naturel *k*, on ait : $\int_x^{+\infty} t^k e^{-t}dt = k!\sum_{i=0}^{k}\frac{x^i}{i!}e^{-x}$ .

Par intégration par parties dans l'intégrale $\int_x^{A} t^{k+1}e^{-t}dt$, en posant $u'(t)=e^{-t}$ et $v(t)=t^{k+1}$, on peut choisir $u(t)=-e^{-t}$ et on a $v'(t)=(k+1)t^k$. Les fonctions *u* et *v* sont de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}$, donc sur tout intervalle $[x,A]$, et ainsi, l'intégration par parties est licite. Elle donne :

$$\int_x^{A} t^{k+1}e^{-t}dt = \left[-t^{k+1}e^{-t}\right]_x^A + \left(k+1\right)\int_x^{A} t^k e^{-t}dt$$

Après développement du crochet, on a :

$$\int_x^{A} t^{k+1}e^{-t}dt = x^{k+1}e^{-x} - A^{k+1}e^{-A} + \left(k+1\right)\int_x^{A} t^k e^{-t}dt$$

Comme $\lim\limits_{A\to+\infty} A^{k+1}e^{-A}=0$ et comme les deux intégrales en jeu ont une limite finie lorsque *A* tend vers $+\infty$ (en effet $\int_x^{+\infty} t^{k+1}e^{-t}dt$ et $\int_x^{+\infty} t^k e^{-t}dt$ convergent), on a, après passage à la limite :

$$\int_x^{+\infty} t^{k+1}e^{-t}dt = x^{k+1}e^{-x} + \left(k+1\right)\int_x^{+\infty} t^k e^{-t}dt$$

Par hypothèse de récurrence, on sait que $\int_x^{+\infty} t^k e^{-t}dt = k!\sum_{i=0}^{k}\frac{x^i}{i!}e^{-x}$ donc :

$$\int_x^{+\infty} t^{k+1}e^{-t}dt = x^{k+1}e^{-x} + \left(k+1\right)\times k!\sum_{i=0}^{k}\frac{x^i}{i!}e^{-x} = x^{k+1}e^{-x} + \left(k+1\right)!\sum_{i=0}^{k}\frac{x^i}{i!}e^{-x}$$

En écrivant $x^{k+1}e^{-x}=(k+1)!\dfrac{x^{k+1}}{(k+1)!}e^{-x}$ et en intégrant ce terme dans la somme (c'est le terme d'indice $k+1$), on trouve $\int_x^{+\infty} t^{k+1}e^{-t}dt=(k+1)!\sum_{i=0}^{k+1}\dfrac{x^i}{i!}e^{-x}$, ce qui achève l'hérédité.

• Conclusion :

$$\boxed{\forall k\in\mathbb{N},\ \int_x^{+\infty} t^k e^{-t}dt=k!\sum_{i=0}^{k}\frac{x^i}{i!}e^{-x}}$$

**6) a)** D'après la question 5b), on a : $\int_x^{+\infty} t^k e^{-t}dt=k!\sum_{i=0}^{k}\dfrac{x^i}{i!}e^{-x}$.

La troisième ligne du script calcule $k$ ! et la sixième ligne (affichage de s) prouve que `s` représente $k!\sum_{i=0}^{k}\dfrac{x^i}{i!}e^{-x}$ (c'est ce qui est demandé). Par conséquent les pointillés dans `s` doivent représenter $\sum_{i=0}^{k}\dfrac{x^i}{i!}$. Il semble donc que le vecteur `u` de la quatrième ligne soit $\left(\dfrac{x^0}{0!},\dfrac{x^1}{1!},...,\dfrac{x^k}{k!}\right)$ et on le sommera pour obtenir la commande donnant `s`.

Pour calculer `u`, il faut diviser élément à élément le vecteur $(x^0, x^1, ..., x^k)$ par le vecteur $(0!, 1!, ..., k!)$.

• Première méthode : on obtient $(x^0, x^1, ..., x^k)$ avec `x.^(0:k)` et $(0!, 1!, ..., k!)$ avec `[1,cumprod(1:k)]` : la concaténation est obligatoire, sinon, avec `cumprod(0:k)`, on obtiendrait le vecteur nul !

Les commandes complétées sont donc :

```
u=x.^(0:k)./[1,cumprod(1:k)]
s=p*sum(u)*exp(-x)
```

• Deuxième méthode : on obtient $(x^1, ..., x^k)$ avec `x.^(1:k)` et $(1!, ..., k!)$ avec `cumprod(1:k)`. En remarquant qu'il reste à ajouter $\dfrac{x^0}{0!}$, c'est-à-dire 1, pour obtenir $\sum_{i=0}^{k}\dfrac{x^i}{i!}$, les commandes complétées sont :

```
u=x.^(1:k)./cumprod(1:k)
s=p*(1+sum(u))*exp(-x)
```

**b)** En posant $u=t-x$ qui est un changement de variable de classe $C^1$ sur $[x,+\infty[$ et bijectif de $[x,+\infty[$ sur $\mathbb{R}_+$, on a : $\int_x^{+\infty} t^k e^{-t}dt=\int_0^{+\infty}(u+x)^k\, e^{-(u+x)}du$

Comme $e^{-(u+x)} = e^{-u}e^{-x}$, on obtient :

$$\boxed{\int_x^{+\infty} t^k e^{-t} dt = e^{-x}\int_0^{+\infty} (u+x)^k\, e^{-u} du}$$

En regardant bien l'intégrale $\int_0^{+\infty} (u+x)^k\, e^{-u} du$, on pense à une variable aléatoire $Z$ suivant la loi exponentielle de paramètre 1 (de densité $u \mapsto e^{-u}$ sur $\mathbb{R}_+$ et nulle ailleurs) et le théorème de transfert montre que cette intégrale est $E\left((Z+x)^k\right)$.

On calcule une valeur approchée de cette espérance par la moyenne empirique d'un grand nombre (ici $100\,000$) de variables indépendantes, toutes de même loi que $(Z+x)^k$. On peut alors proposer :

```
k=input('entrez la valeur de k : ')
Z=grand(1,100 000,'exp',1)
s=mean((Z+x).^k)
disp(s)
```

**7) a)** • Soit $P$ et $Q$ deux polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ et $\lambda$ un réel.

On a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\big(\psi(P+\lambda Q)\big)(x) = e^x \int_x^{+\infty} (P+\lambda Q)(t) e^{-t} dt$.

Par définition de l'addition des fonctions, on en déduit :

$$\big(\psi(P+\lambda Q)\big)(x) = e^x \int_x^{+\infty} \big(P(t)+\lambda Q(t)\big) e^{-t} dt$$

Par linéarité de l'intégration, on a alors :

$$\big(\psi(P+\lambda Q)\big)(x) = e^x \int_x^{+\infty} P(t) e^{-t} dt + +\lambda e^x \int_x^{+\infty} Q(t) e^{-t} dt$$

On a donc :

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\big(\psi(P+\lambda Q)\big)(x) = \big(\psi(P)\big)(x) + \lambda\big(\psi(Q)\big)(x) = \big(\psi(P)+\lambda\psi(Q)\big)(x)$

Ceci prouve (définition de l'égalité de deux fonctions) que :

$$\psi(P+\lambda Q) = \psi(P) + \lambda\psi(Q)$$

Conclusion : $\psi$ est linéaire.

• Montrons que si $P$ appartient à $\mathbb{R}_n[X]$, alors $\psi(P)$ aussi.

Comme $P$ appartient à $\mathbb{R}_n[X]$, on peut écrire $P(t) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k\, t^k$ et on a :

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\psi(P)(x) = e^x \int_x^{+\infty} P(t) e^{-t} dt = e^x \int_x^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} \alpha_k\, t^k e^{-t} dt$.

Par linéarité de l'intégration, on obtient : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\psi(P)(x) = e^x \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \int_x^{+\infty} t^k e^{-t} dt$.

On sait, d'après la question 5b), que $\int_x^{+\infty} t^k e^{-t} dt = k!\sum_{i=0}^{k} \frac{x^i}{i!} e^{-x}$, d'où :

$\psi(P)(x)=e^x\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\, k!\sum_{i=0}^{k}\frac{x^i}{i!}e^{-x}=\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{k}\alpha_k k!\frac{x^i}{i!}$. Ceci montre bien que $\psi(P)$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à $n$.

• Conclusion :

$$\boxed{\psi \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}_n[X]}$$

**b)** En écrivant $\int_x^{+\infty}P(t)e^{-t}dt=\int_0^{+\infty}P(t)e^{-t}dt-\int_0^{x}P(t)e^{-t}dt$, grâce à la relation de Chasles, on constate que la fonction $x\mapsto\int_0^{+\infty}P(t)e^{-t}dt$ est constante (donc de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}$) et que la fonction $x\mapsto\int_0^{x}P(t)e^{-t}dt$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}$, en tant que primitive de la fonction continue $t\mapsto P(t)e^{-t}$.

Par conséquent, $x\mapsto\int_x^{+\infty}P(t)e^{-t}dt$ est la différence de deux fonctions de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}$ donc est aussi de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}$.

Comme $F(x)=e^x\int_x^{+\infty}P(t)e^{-t}dt$, la fonction $F$ est le produit de deux fonctions de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}$, et ainsi :

$$\boxed{F \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}}$$

Avec l'égalité $\int_x^{+\infty}P(t)e^{-t}dt=\int_0^{+\infty}P(t)e^{-t}dt-\int_0^{x}P(t)e^{-t}dt$, on voit que la dérivée de $x\mapsto\int_x^{+\infty}P(t)e^{-t}dt$ est $x\mapsto -P(x)e^{-x}$ et ensuite, par la formule de dérivation d'un produit, on trouve : $F'(x)=e^x\int_x^{+\infty}P(t)e^{-t}dt-e^xP(x)e^{-x}$.

En simplifiant, on a :

$$\boxed{F'(x)=F(x)-P(x)}$$

**c)** Si $P$ est un polynôme de $\mathrm{Ker}(\psi)$, on a : $\forall x\in\mathbb{R}$, $\psi(P)(x)=0$. Avec la notation de l'énoncé, ceci s'écrit : $\forall x\in\mathbb{R}$, $F(x)=0$.

En dérivant, on obtient $F'(x)=0$ et grâce à l'égalité $F'(x)=F(x)-P(x)$, on en déduit : $\forall x\in\mathbb{R}$, $P(x)=0$.

Ceci prouve que $\psi$ est injectif donc bijectif (car $\psi$ opère dans $\mathbb{R}_n[X]$ qui est de dimension finie)

$$\boxed{\psi \text{ est un automorphisme de } \mathbb{R}_n[X]}$$

**8) a)** Comme $P$ est un polynôme, vecteur propre de $\psi$ pour la valeur propre $\lambda$, on a : $\psi(P)=\lambda P$ et en évaluant cette égalité en $x$, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \big(\psi(P)\big)(x) = \lambda P(x)$$

Toujours avec la notation de l'énoncé, ceci s'écrit :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \lambda P(x) \qquad (1)$$

En dérivant, on trouve :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F'(x) = \lambda P'(x) \qquad (2)$$

En injectant (1) et (2) dans la relation $F'(x) = F(x) - P(x)$, on a :

$$\lambda P'(x) = \lambda P(x) - P(x)$$

Finalement, comme $\lambda \neq 0$, on a : $\forall x \in \mathbb{R},\ P'(x) = \dfrac{\lambda - 1}{\lambda} P(x)$.

Conclusion :

$$\boxed{P' = \frac{\lambda - 1}{\lambda} P}$$

**b)** L'égalité précédente montre que $P'$ et $\dfrac{\lambda - 1}{\lambda} P$ sont égaux donc ont le même degré. Dès lors, si λ était différent de 1, $P'$ et $P$ seraient de même degré (puisque $\dfrac{\lambda - 1}{\lambda} P$ et $P$ seraient de même degré), ce qui n'est pas le cas puisque $P$ est non nul (en tant que vecteur propre).

Conclusion :

$$\boxed{\lambda = 1 \text{ est la seule valeur propre possible de } \psi}$$

**c)** Il faut trouver un polynôme $P$ non nul tel que $\psi(P) = P$. Si on se souvient du calcul fait à la question 5a), on a : $\int_x^{+\infty} e^{-t} dt = e^{-x}$. En multipliant par $e^x$, on obtient : $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x \int_x^{+\infty} e^{-t} dt = 1$. Ceci signifie que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \big(\psi(e_0)\big)(x) = e_0(x)$$

On a donc $\psi(e_0) = e_0$, et comme $e_0$ n'est pas le polynôme nul, on peut conclure :

$$\boxed{\lambda = 1 \text{ est la seule valeur propre de } \psi}$$

**9) a)** Montrons que : $\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ \varphi(P) = \psi(P)$. Il suffit de montrer que $\varphi$ et $\psi$ coïncident sur la base $\mathcal{B}$.

- On a d'une part :

$\forall x \in \mathbb{R},\ \big(\varphi(e_j)\big)(x) = \sum_{k=0}^{n} e_j^{(k)}(x) = \sum_{k=0}^{j} e_j^{(k)}(x)$ (on a enlevé les termes nuls).

En se souvenant que la dérivée $k^{\text{ème}}$ de $x \mapsto x^j$ est $x \mapsto \dfrac{j!}{(j-k)!}x^{j-k}$, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \big(\varphi(e_j)\big)(x) = \sum_{k=0}^{j} \frac{j!}{(j-k)!}x^{j-k}$$

En posant $i = j-k$, on a finalement :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \big(\varphi(e_j)\big)(x) = \sum_{i=0}^{j} \frac{j!}{i!}x^{i}$$

• On a d'autre part, d'après la question 5b) :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \big(\psi(e_j)\big)(x) = e^x \int_x^{+\infty} t^j e^{-t}dt = e^x \times j!\sum_{i=0}^{j}\frac{x^i}{i!}e^{-x} = j!\sum_{i=0}^{j}\frac{x^i}{i!} = \sum_{i=0}^{j}\frac{j!}{i!}x^i$$

On vient donc de montrer que, pour tout $j$ de $[\![0,n]\!]$, on a : $\varphi(e_j) = \psi(e_j)$.

Conclusion :

$$\boxed{\varphi = \psi}$$

**b)** Supposons qu'il existe un réel $a$ tel que : $\forall x \geq a,\ P(x) \geq 0$. On a alors, pour tout $t$ de $[x,+\infty[$, $P(t) \geq 0$ (car $t \geq x \geq a$).

En multipliant par $e^{-t} > 0$, on obtient : $P(t)e^{-t} \geq 0$.

Par positivité de l'intégrale ("bornes" évidemment dans l'ordre croissant : ce sont $x$ et $+\infty$), on a :

$$\forall x \geq a,\ \int_x^{+\infty} P(t)e^{-t}dt \geq 0$$

Comme $e^x > 0$, on en déduit :

$$\forall x \geq a,\ e^x\int_x^{+\infty} P(t)e^{-t}dt \geq 0$$

Ceci veut dire :

$$\forall x \geq a,\ \big(\psi(P)\big)(x) \geq 0$$

Grâce à la question précédente, on peut remplacer $\psi$ par $\varphi$, ce qui donne :

$$\forall x \geq a,\ \big(\varphi(P)\big)(x) \geq 0$$

En revenant à la définition de $\varphi$, on trouve bien :

$$\boxed{\forall x \geq a,\ \sum_{i=0}^{n} P^{(i)}(x) \geq 0}$$

**Concours d'admission sur classes préparatoires**
**Option scientifique**

**RAPPORT DU JURY**
**ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES**
**2017**

## Présentation de l'épreuve :

- L'épreuve comportait, comme d'habitude, trois exercices et un problème, ce qui permettait de juger les candidats sur une partie conséquente du programme des classes préparatoires.
- Le sujet balayait largement le programme en donnant, cette année, une place importante à l'algèbre linéaire et à l'algèbre bilinéaire (pas de probabilités discrètes pour une fois).

La diversité des thèmes abordés a permis à tous les candidats de s'exprimer et de montrer leurs compétences, ne serait-ce que sur une partie du programme.

- Deux exercices et le problème comportaient une ou plusieurs questions d'informatique.
- Dans l'ensemble, les correcteurs ont trouvé le sujet bien adapté au public concerné, peut-être un peu plus classique que les années précédentes, mais comportant, malgré tout, quelques questions particulièrement difficiles où seuls les bons candidats ont pu tirer leur épingle du jeu en montrant leur capacité à mener un calcul compliqué à son terme ainsi que leur faculté à raisonner sur des situations abstraites.

## Description du sujet :

**L'exercice 1** proposait l'étude de la fonction $f_n$ définie par :

$$\forall x \in [0,1],\ f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} x^k$$

La première question demandait de compléter deux scripts `Scilab` afin qu'ils calculent, de deux façons différentes, la valeur de $f_n(x)$ pour $n$ et $x$ entrés par l'utilisateur.

La suite de l'exercice consistait en l'étude de la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, où $\alpha_n$ est l'unique solution sur $[0,1]$ de l'équation $f_n(x)=1$. Une dernière question portait sur le rôle d'un script `Scilab`, qui donnait, en fait, une valeur approchée de $\alpha_n$ par excès.

- Cet exercice, jugé facile par les correcteurs, a permis à tous les candidats, ou presque, de gagner quelques points.
- Notons tout de même que de nombreux candidats ont oublié le cours de première année et ont des problèmes pour simplifier $f_n(x)$ dans le cas où $x$ est différent de 1, ou pour citer correctement les conditions d'application du théorème de la bijection (ce dernier étant souvent énoncé « comme en terminale »).

**L'exercice 2**, portait sur la partie probabilités du programme. On considérait une suite $X_1,...,X_n,...$ de variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé, indépendantes et suivant toutes la loi uniforme sur $[0,1]$.

L'objectif était dans un premier temps d'étudier la variable $M_n = \max(X_1, X_2,..., X_n)$, puis de prouver la convergence en loi de la suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, avec $Y_n = n(1-M_n)$, vers une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre 1. En amont, une simulation informatique permettait de conjecturer ce résultat.

• Cet exercice a été assez bien réussi, quelques questions difficiles comme 1e), 2b) et 3b) mises à part.

**L'exercice 3** portait sur l'algèbre bilinéaire. On considérait un espace euclidien $E$ de dimension $n+1$. rapporté à une base orthonormale $(\varepsilon_0, \varepsilon_1,..., \varepsilon_n)$. On définissait les vecteurs $u = \frac{1}{\sqrt{n+1}}\sum_{k=0}^{n}\varepsilon_k$ et $e_i = \sqrt{\frac{n+1}{n}}\left(\varepsilon_i - \langle\varepsilon_i, u\rangle u\right)$, pour $i$ dans $[\![0,n]\!]$, ainsi que le sous-espace $F = (\text{Vect}(u))^{\perp}$.

L'objectif était de montrer que l'application $f$ de $F\times F$ dans $\mathbb{R}$ définie ci-dessous est nulle :

$$\forall(x,y)\in F\times F\ ,\ f(x,y) = \sum_{k=0}^{n}\langle x, e_k\rangle\langle y, e_k\rangle - \frac{n+1}{n}\langle x,y\rangle$$

• Cet exercice a été abordé avec des fortunes diverses, certains candidats n'ayant visiblement que très peu de connaissances sur cette partie portant exclusivement sur le programme de seconde année.

• De très nombreux candidats sont rapidement submergés par les calculs.

**Le problème**, portant sur le programme d'algèbre, proposait l'étude de deux endomorphismes de $\mathbb{R}_n[X]$.

Le premier, noté φ, qui à tout polynôme $P$ de $\mathbb{R}_n[X]$ associe :

$$\varphi(P) = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}$$

Le deuxième, noté $\psi$, qui à tout polynôme $P$ de $\mathbb{R}_n[X]$ associe la fonction $F = \psi(P)$ définie par :

$$\forall x\in\mathbb{R}\ ,\ F(x) = e^x\int_x^{+\infty}P(t)e^{-t}dt$$

L'objectif était de montrer que ces deux endomorphismes sont égaux.

• La plupart des candidats ont abordé le problème, avec une certaine réussite, du moins dans les premières questions.

• Certains candidats ont confondu allègrement $(\psi(P))'$ et $\psi(P')$ sans argumenter.

**Statistiques :**

• Pour l'ensemble des 3787 candidats ayant composé, la moyenne obtenue à cette épreuve est égale à 11,346 sur 20 (supérieure de 0,27 point à celle de l'année dernière) et l'écart type vaut 5,783 (très légèrement inférieur à celui de l'année dernière, mais toujours important).

• 31,8% des candidats, contre 35,4% l'année dernière, ont une note strictement inférieure à 8 (parmi eux, 11,85% ont une note inférieure à 4).

• 22,3% des candidats ont une note comprise entre 8 et 12 (pourcentage sensiblement égal à celui de 2016 qui était de 22,1%).

• 26,16% des candidats ont une note supérieure ou égale à 16 (pourcentage sensiblement égal à celui de 2016 qui était de 25%).

**Conclusion :**

Comme l'an dernier, le niveau est très hétérogène et l'impression générale ressentie à la lecture des copies amène à penser que les questions les plus subtiles, qui demandent une compréhension fine de la théorie, quel que soit le domaine concerné, échappent à presque tous les candidats. Les meilleurs ont acquis des techniques et des réflexes mais ne comprennent pas forcément en profondeur ce qu'ils font.

Les copies sont, dans l'ensemble, bien présentées et bien rédigées mais il reste, en assez grand nombre, des candidats qui rendent pratiquement un brouillon, proposent des copies sales et raturées, parfois sans les numéros des questions traitées, et truffent leur copie d'abréviations non officielles (par exemple écrire SRC, pour « sous réserve de convergence » sous une égalité, et en plus ne pas vérifier la convergence de l'intégrale étudiée) : les correcteurs n'apprécient pas du tout et n'ont alors aucune compassion pour ces candidats qui bien évidemment s'exposent à des sanctions.

Un nombre non négligeable de candidats restent adeptes des réponses floues : il faut savoir que ce type de réponse est sanctionné et que l'absence d'argument ou le manque de précision rend la réponse irrecevable.

La mauvaise maîtrise des techniques de base et des calculs élémentaires reste une constante et semble même s'aggraver pour un nombre non négligeable de candidats. Il serait bien que les futurs candidats investissent un peu de leur temps sur ces deux points et n'oublient pas qu'une épreuve de concours valide deux années d'étude : il faut donc garder en tête les connaissances de première année.

L'investissement en informatique, à peu près stable par rapport à l'année dernière, a permis à de nombreux candidats de glaner des points sans y passer énormément de temps.

Précisons pour les futurs candidats qu'ils ne sont pas obligés de recopier les énoncés des questions avant de les traiter et qu'ils ne sont pas, non plus, obligés de recopier tout un programme d'informatique si la question posée était seulement de compléter quelques instructions manquantes.

Pour finir, il va de soi que, s'il est demandé de compléter une commande Scilab, on pénalise très peu si le candidat en écrit plusieurs (pourvu qu'elles répondent à la question).

Rappelons, comme d'habitude, que l'honnêteté, la simplicité, la précision et la rigueur sont des vertus attendues par tous les correcteurs sans exception, et qu'une bonne réponse est toujours une réponse construite rigoureusement.