CONCOURS EDHEC - ADMISSION SUR TITRES

EN PREMIERE ANNEE

AVRIL 2020

<u>EPREUVE DE MATHEMATIQUES</u>

CORRIGE

Exercice 1

1) a) Par récurrence : c'est vrai pour $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et si l'on suppose, pour un certain entier naturel n que c'est vrai pour u_n et u_{n+1}, alors on a $0 \le u_{n+1} + u_n \le 2$ d'où $0 \le u_{n+2} \le \frac{2}{n+2} \le 1$.

Conclusion :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \le u_n \le 1}$$

b) Comme $u_{n+2} = \frac{1}{n+2}(u_{n+1} + u_n)$, on déduit de la question précédente que : $u_{n+2} \le \frac{2}{n+2}$, ce qui signifie que : $\forall n \ge 2,\ u_n \le \frac{2}{n}$. Ceci est encore vrai pour $n = 1$ donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \le \frac{2}{n}}$$

D'après les deux questions précédentes, on a, pour tout entier naturel n non nul : $0 \le u_n \le \frac{2}{n}$.

Par encadrement :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = 0}$$

2) a) En injectant $u_n \le \frac{2}{n}$ et $u_{n+1} \le \frac{2}{n+1}$ ($n \in \mathbb{N}^*$) dans l'égalité $u_{n+2} = \frac{1}{n+2}(u_{n+1} + u_n)$, on obtient : $u_{n+2} \le \frac{1}{n+2}\left(\frac{2}{n+1} + \frac{2}{n}\right) \le \frac{1}{n+2}\left(\frac{2}{n} + \frac{2}{n}\right)$.

Finalement :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+2} \le \frac{4}{n(n+2)}}$$

b) On déduit de la question 2a) que, pour tout entier n supérieur ou égal à 3, on a $u_n \le \frac{4}{n(n-2)}$.

La série de terme général $\frac{4}{n(n-2)}$ est convergente (car $\frac{4}{n(n-2)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{4}{n^2}$ et la série de Riemann de paramètre 2 > 1 est convergente) donc par critère de comparaison (séries à termes positifs), la série de terme général u_n est convergente.

3) On a $\sum_{k=0}^{n-2}(k+2)u_{k+2} = \sum_{k=0}^{n-2}(u_{k+1} + u_k) = \sum_{k=0}^{n-2}u_{k+1} + \sum_{k=0}^{n-2}u_k = \sum_{k=1}^{n-1}u_k + \sum_{k=0}^{n-2}u_k = \sum_{k=1}^{n-1}u_k + \sum_{k=1}^{n-2}u_k$, car $u_0 = 0$.

Ceci s'écrit encore (changement d'indice $i = k+2$) : $\sum_{i=2}^{n} i\,u_i = \sum_{k=1}^{n-1}u_k + \sum_{k=1}^{n-2}u_k$.

En ajoutant le premier terme qui vaut 1 dans la somme de gauche, on obtient :

$$\sum_{n=1}^{n} i\,u_i = 1 + \sum_{k=1}^{n-1}u_k + \sum_{k=1}^{n-2}u_k$$

Les deux sommes de droite ont une limite finie lorsque n tend vers $+\infty$ donc on peut passer à la limite et on trouve : $\sum_{n=1}^{+\infty} i\,u_i = 1 + 2\sum_{k=1}^{+\infty}u_k$.

Conclusion (en réindiçant) :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} n u_n = 1 + 2\sum_{n=1}^{+\infty} u_n}$$

Exercice 2

1) D'après le cours, si X suit la loi uniforme sur $[a,b]$, sa fonction de répartition F est donnée par :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{si } a \le x \le b \\ 1 & \text{si } x > b \end{cases}$$

Ici, on a donc : $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \dfrac{x-a}{a+1-a} & \text{si } a \le x \le a+1 \\ 1 & \text{si } x > a+1 \end{cases}$, ce qui donne :

$$\boxed{F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ x-a & \text{si } a \le x \le a+1 \\ 1 & \text{si } x > a+1 \end{cases}}$$

2) On doit savoir que, si X suit la loi uniforme sur $[a,b]$, alors X possède une espérance et une variance données par : $E(X) = \dfrac{a+b}{2}$ et $V(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12}$.

Ici, on obtient : $E(X) = \dfrac{2a+1}{2}$ et $V(X) = \dfrac{(a+1-a)^2}{12}$, et en simplifiant :

$$\boxed{E(X) = a + \frac{1}{2} \text{ et } V(X) = \frac{1}{12}}$$

3) a) On a $Y_n = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ donc, par linéarité de l'espérance : $E(Y_n) = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i)$.

Comme X_1, X_2, ..., X_n ont même loi que X, leur espérance commune est celle de X qui vaut $a + \dfrac{1}{2}$, ce qui donne $E(Y_n) = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X) = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(a + \dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{n} \times n \times \left(a + \dfrac{1}{2}\right)$.

Conclusion :

$$\boxed{E(Y_n) = a + \frac{1}{2}}$$

b) En posant $\widehat{Y_n} = Y_n - \dfrac{1}{2}$, on dispose bien d'un estimateur car $\widehat{Y_n}$ est fonction du seul échantillon (X_1, X_2, ..., X_n), et c'est une variable aléatoire indépendante de a. De plus, par linéarité de l'espérance, on a $E\left(\widehat{Y_n}\right) = E(Y_n) - \dfrac{1}{2} = a + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2} = a$.

Conclusion :

$$\boxed{\widehat{Y_n} \text{ est un estimateur sans biais de } a}$$

c) La variance de Y_n est donnée par : $V(Y_n) = \dfrac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} V(X_k) = \dfrac{1}{n^2} \times n \times \dfrac{1}{12}$

On a donc :

$$\boxed{V(Y_n) = \frac{1}{12n}}$$

Comme $\widehat{Y_n} = Y_n - \dfrac{1}{2}$, on a aussi :

$$\boxed{V\left(\widehat{Y_n}\right) = \frac{1}{12n}}$$

4) a) On a $F_n(x) = P(M_n \leq x) = P\left(\bigcap_{k=1}^{n}[X_k \leq x]\right) \overset{\text{ind}}{=} \prod_{k=1}^{n} P(X_k \leq x) \overset{\text{même loi}}{=} F(x)^n$

On obtient donc :

$$\boxed{F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ (x-a)^n & \text{si } a \leq x \leq a+1 \\ 1 & \text{si } x > a+1 \end{cases}}$$

b) La fonction F_n est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être en a et $a+1$. De plus, elle est continue en a et $a+1$ sans problème donc M_n est une variable aléatoire à densité.
Une densité f_n de M_n est une fonction coïncidant avec la dérivée de F_n, sauf éventuellement en a et $a+1$ donc on peut choisir :

$$\boxed{f_n(x) = \begin{cases} n(x-a)^{n-1} & \text{si } a \leq x \leq a+1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$$

c) La variable M_n est bornée donc elle a une espérance : en effet, les intégrales $\int_{-\infty}^{a} f_n(x)\,dx$ et $\int_{a+1}^{+\infty} f_n(x)\,dx$ sont nulles et l'intégrale $\int_{a}^{a+1} f_n(x)\,dx$ est bien définie. Pour finir, on a :
$E(M_n) = \int_a^{a+1} f_n(x)\,dx = \int_a^{a+1} nx(x-a)^{n-1}\,dx = \int_0^1 n(t+a)t^{n-1}dt = \int_0^1 nat^{n-1}dt + \int_0^1 nt^n dt$.

On trouve alors : $E(M_n) = a\left[t^n\right]_0^1 + n\left[\dfrac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1$.

Bilan :

$$\boxed{E(M_n) = a + \frac{n}{n+1}}$$

d) Par linéarité de l'espérance, on a : $E\left(\widehat{M_n}\right) = E(M_n) - 1 = a + \dfrac{n}{n+1} - 1 = a - \dfrac{1}{n+1}$.

On en déduit $\lim\limits_{n \to +\infty} E\left(\widehat{M_n}\right) = a$ donc $\widehat{M_n}$ est un estimateur asymptotiquement sans biais de a.

5) a) On a $\widehat{Y_n} = Y_n - \frac{1}{2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \frac{1}{2}\right)$ et on peut appliquer le théorème limite central à la variable $\widehat{Y_n}$ car les variables $X_i - \frac{1}{2}$ sont mutuellement indépendantes sont de même loi et ont une espérance et une variance.

Ce théorème stipule que $\dfrac{\widehat{Y_n} - E\left(\widehat{Y_n}\right)}{\sqrt{V\left(\widehat{Y_n}\right)}}$ converge en loi vers une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite. D'après les questions 2a) et 2c), on peut affirmer que $\widehat{Y_n}^{\,*} = \sqrt{12n}\left(\widehat{Y_n} - a\right)$ converge en loi vers une variable aléatoire Y suivant la loi normale centrée réduite.

Le théorème admis permet d'écrire que $\sqrt{n}\left(\widehat{Y_n} - a\right)$ converge en loi vers la variable $\frac{1}{\sqrt{12}}Y$ qui suit la loi normale $\mathcal{N}\left(0, \frac{1}{12}\right)$.

b) Si $\widehat{Y_n}$ était de vitesse n, alors $n\left(\widehat{Y_n} - a\right)$ convergerait en loi vers une variable aléatoire non quasi-certainement nulle et en multipliant par $\frac{1}{\sqrt{n}}$ qui tend vers 0, on aurait $\sqrt{n}\left(\widehat{Y_n} - a\right)$ qui convergerait en loi vers la variable nulle, ce qui n'est pas le cas d'après la question précédente.

6) a) Comme M_n prend ses valeurs dans $[a\,,a+1]$ et comme $\widehat{M_n} = M_n - 1$, alors $\widehat{M_n}$ prend des valeurs inférieures à a donc la variable $n\left(\widehat{M_n} - a\right)$ est négative et, ainsi :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ P\left(n\left(\widehat{M_n} - a\right) \le x\right) = 1}$$

b) Pour tout réel x négatif et pour tout entier naturel n, on a :

$$P\left(n\left(\widehat{M_n} - a\right) \le x\right) = P\left(\widehat{M_n} - a \le \frac{x}{n}\right) = P\left(\widehat{M_n} \le a + \frac{x}{n}\right) = P\left(M_n \le a + 1 + \frac{x}{n}\right) = F_n\left(a + 1 + \frac{x}{n}\right)$$

En remplaçant (avec la certitude que $a \le a + 1 + \frac{x}{n} \le a + 1$ dès que n est assez grand, c'est-à-dire supérieur à $-x$), on obtient :

$$\boxed{P\left(n\left(\widehat{M_n} - a\right) \le x\right) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n}$$

c) Comme $M = -Z$, on a déjà $F_M(x) = 1$ si $x > 0$.
De plus, pour tout réel x négatif, on a : $F_M(x) = P(M \le x) = P(-Z \le x) = P(Z \ge -x) = 1 - F_Z(-x)$
Comme $-x > 0$, on obtient : $F_M(x) = 1 - \left(1 - \mathrm{e}^{-(-x)}\right) = \mathrm{e}^x$. On a bien :

$$\boxed{F_M(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^x & \text{si } x \le 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}}$$

d) Pour tout réel x négatif et tout entier naturel n supérieur à $-x$, on a $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)\right)$.

La grande parenthèse tend vers x car $n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)\underset{+\infty}{\sim} n\times\frac{x}{n}=x$ donc par continuité d'exp en x, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=\mathrm{e}^x$. On a donc : $\lim\limits_{n\to+\infty}P\left(n\left(\widehat{M}_n-a\right)\le x\right)=\begin{cases}\mathrm{e}^x & \text{si } x\le 0\\ 1 & \text{si } x>0\end{cases}=F_M(x)$.

On en déduit que $n\left(\widehat{M}_n-a\right)$ converge en loi vers la variable aléatoire M.

Problème

1) a) En notant respectivement $m_{i,j}$ et $n_{i,j}$ les termes génériques des matrices M et N, on a successivement :

$$\mathrm{Tr}(aM+N)=\left(am_{1,1}+n_{1,1}\right)+\left(am_{2,2}+n_{2,2}\right)+\left(am_{3,3}+n_{3,3}\right).$$

$$\mathrm{Tr}(aM+N)=\left(am_{1,1}+am_{2,2}+am_{3,3}\right)+\left(n_{1,1}+n_{2,2}+n_{3,3}\right)$$

$$\mathrm{Tr}(aM+N)=a\left(m_{1,1}+m_{2,2}+m_{3,3}\right)+\left(n_{1,1}+n_{2,2}+n_{3,3}\right)$$

Finalement :

$$\boxed{\mathrm{Tr}(aM+N)=a\,\mathrm{Tr}(M)+\mathrm{Tr}(N)}$$

b) • Avec les mêmes notations, on a :

$$MN=\begin{pmatrix}m_{1,1}&m_{1,2}&m_{1,3}\\m_{2,1}&m_{2,2}&m_{2,3}\\m_{3,1}&m_{3,2}&m_{3,3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}n_{1,1}&n_{1,2}&n_{1,3}\\n_{2,1}&n_{2,2}&n_{2,3}\\n_{3,1}&n_{3,2}&n_{3,3}\end{pmatrix}$$

$$MN=\begin{pmatrix}m_{1,1}n_{1,1}+m_{1,2}n_{2,1}+m_{1,3}n_{3,1}&\times&\times\\ \times&m_{2,1}n_{1,2}+m_{2,2}n_{2,2}+m_{2,3}n_{3,2}&\times\\ \times&\times&m_{3,1}n_{1,3}+m_{3,2}n_{2,3}+m_{3,3}n_{3,3}\end{pmatrix}$$

On obtient donc : $\mathrm{Tr}\,(MN)=m_{1,1}n_{1,1}+m_{1,2}n_{2,1}+m_{1,3}n_{3,1}+m_{2,1}n_{1,2}+m_{2,2}n_{2,2}+m_{2,3}n_{3,2}$

$+\,m_{3,1}n_{1,3}+m_{3,2}n_{2,3}+m_{3,3}n_{3,3}$

De même : $NM=\begin{pmatrix}n_{1,1}&n_{1,2}&n_{1,3}\\n_{2,1}&n_{2,2}&n_{2,3}\\n_{3,1}&n_{3,2}&n_{3,3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}m_{1,1}&m_{1,2}&m_{1,3}\\m_{2,1}&m_{2,2}&m_{2,3}\\m_{3,1}&m_{3,2}&m_{3,3}\end{pmatrix}$

$$NM=\begin{pmatrix}n_{1,1}m_{1,1}+n_{1,2}m_{2,1}+n_{1,3}m_{3,1}&\times&\times\\ \times&n_{2,1}m_{1,2}+n_{2,2}m_{2,2}+n_{2,3}m_{3,2}&\times\\ \times&\times&n_{3,1}m_{1,3}+n_{3,2}m_{2,3}+n_{3,3}m_{3,3}\end{pmatrix}$$

On obtient cette fois :

$\mathrm{Tr}\,(NM)=n_{1,1}m_{1,1}+n_{1,2}m_{2,1}+n_{1,3}m_{3,1}+n_{2,1}m_{1,2}+n_{2,2}m_{2,2}+n_{2,3}m_{3,2}$

$+\,n_{3,1}m_{1,3}+n_{3,2}m_{2,3}+n_{3,3}m_{3,3}$

À l'ordre des termes près, on constate que :

$$\boxed{\mathrm{Tr}\,(NM)=\mathrm{Tr}\,(MN)}$$

• Si une matrice A est semblable à une matrice B, il existe une matrice inversible P telle que : $A = PBP^{-1}$ (ou $B = P^{-1}AP$).
Dès lors, on peut écrire (la deuxième égalité provient de la première question avec $N = PB$ et $M = P^{-1}$) :

$$\text{Tr}\,(A) = \text{Tr}\,\left((PB)P^{-1}\right) = \text{Tr}\,\left(P^{-1}(PB)\right) = \text{Tr}\left(\left(P^{-1}P\right)B\right) = \text{Tr}(B)$$

2) En développant et ordonnant $P(X) = (X-\lambda_1)(X-\lambda_2)(X-\lambda_3)$, on obtient :

$$P(X) = X^3 - (\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)X^2 + (\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_1\lambda_3)X - \lambda_1\lambda_2\lambda_3$$

Par identification des coefficients avec $P(X) = X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0$, on trouve :

$$\boxed{a_0 = -\lambda_1\lambda_2\lambda_3,\ a_1 = \lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_1\lambda_3,\ a_2 = -\lambda_1-\lambda_2-\lambda_3}$$

3) a) Comme A possède trois valeurs propres distinctes, elle est diagonalisable et ainsi, il existe une matrice inversible Q telle que : $A = QDQ^{-1}$.
On montre la formule demandée par récurrence.
• Pour $n = 0$, on a : $QD^0Q^{-1} = QIQ^{-1} = QQ^{-1} = I = A^0$.
• Si l'on suppose, pour un entier naturel fixé que $A^n = QD^nQ^{-1}$, alors :

$$A^{n+1} = A^nA = \left(QD^nQ^{-1}\right)\left(QD\ Q^{-1}\right) = QD^n\left(Q^{-1}Q\right)D\ Q^{-1} = QD^{n+1}Q^{-1}$$

Conclusion :

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ A^n = QD^nQ^{-1}}$$

b) La relation précédente prouve que les matrices A^n et D^n sont semblables donc, d'après la première question, elles ont même trace.

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ \text{Tr}\left(A^n\right) = \text{Tr}\left(D^n\right)}$$

c) • Pour $n = 1$, la relation précédente donne : $\text{Tr}(A) = \text{Tr}(D)$ et comme $\text{Tr}\ (D) = \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3$, alors d'après la question 2), on obtient :

$$\boxed{\text{Tr}(A) = -a_2}$$

• Pour $n = 2$, la relation précédente donne $\text{Tr}\left(A^2\right) = \text{Tr}\left(D^2\right)$, et comme $\text{Tr}\left(D^2\right) = \lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2$, alors toujours d'après la question 2), on obtient :

$$\text{Tr}\left(A^2\right) = \lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2$$

Par ailleurs, on a :
$a_2^2 - 2a_1 = (-\lambda_1-\lambda_2-\lambda_3)^2 - 2(\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_1\lambda_3)$.
$a_2^2 - 2a_1 = (\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)^2 - 2(\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_1\lambda_3)$.
En développant le carré, on trouve : $a_2^2 - 2a_1 = \lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2$.
Conclusion :

$$\boxed{\text{Tr}\ \left(A^2\right) = a_2^2 - 2a_1}$$

• Pour $n=3$ la relation précédente donne : $\text{Tr}\left(A^3\right)=\text{Tr}\left(D^3\right)$ et comme $\text{Tr}\left(D^3\right)=\lambda_1^3+\lambda_2^3+\lambda_3^3$, alors toujours d'après la question 2), on obtient :

$$\text{Tr}\left(A^3\right)=\lambda_1^3+\lambda_2^3+\lambda_3^3$$

Par ailleurs, on a :

$-a_2^3+3a_1a_2-3a_0=-(-\lambda_1-\lambda_2-\lambda_3)^3+3(\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_1\lambda_3)(-\lambda_1-\lambda_2-\lambda_3)+3\lambda_1\lambda_2\lambda_3$.

Grâce à la règle des signes, on a :

$-a_2^3+3a_1a_2-3a_0=(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)^3-3(\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_1\lambda_3)(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)+3\lambda_1\lambda_2\lambda_3$

En développant avec précaution et en arrangeant, on trouve :

- $(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)^3=\lambda_1^3+\lambda_2^3+\lambda_3^3+3\lambda_1^2\lambda_2+3\lambda_2^2\lambda_3+3\lambda_1\lambda_3^2+3\lambda_1\lambda_2^2+3\lambda_1^2\lambda_3+3\lambda_2\lambda_3^2+6\lambda_1\lambda_2\lambda_3$.
- $-3(\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_1\lambda_3)(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)=-3\lambda_1^2\lambda_2-3\lambda_1\lambda_2^2-3\lambda_2^2\lambda_3-3\lambda_2\lambda_3^2-3\lambda_1^2\lambda_3-3\lambda_1\lambda_3^2-9\lambda_1\lambda_2\lambda_3$.

On obtient donc : $-a_2^3+3a_1a_2-3a_0=\lambda_1^3+\lambda_2^3+\lambda_3^3$

Conclusion :

$$\boxed{\text{Tr}\left(A^3\right)=-a_2^3+3a_1a_2-3a_0}$$

4) On a $P(D)=(D-\lambda_1I)(D-\lambda_2I)(D-\lambda_3I)$ et on a aussi :

$$D-\lambda_1I=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&\lambda_2-\lambda_1&0\\0&0&\lambda_3-\lambda_1\end{pmatrix},\ D-\lambda_2I=\begin{pmatrix}\lambda_1-\lambda_2&0&0\\0&0&0\\0&0&\lambda_3-\lambda_2\end{pmatrix}\text{ et }D-\lambda_3I=\begin{pmatrix}\lambda_1-\lambda_3&0&0\\0&\lambda_2-\lambda_3&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

On en déduit :

$$(D-\lambda_1I)(D-\lambda_2I)=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&\lambda_2-\lambda_1&0\\0&0&\lambda_3-\lambda_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1-\lambda_2&0&0\\0&0&0\\0&0&\lambda_3-\lambda_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)\end{pmatrix}$$

Pour finir, on a :

$$(D-\lambda_1I)(D-\lambda_2I)(D-\lambda_3I)=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1-\lambda_3&0&0\\0&\lambda_2-\lambda_3&0\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

Conclusion :

$$\boxed{P(D)=0}$$

Par ailleurs, on a aussi :

$P(A)=A^3+a_2A^2+a_1A+a_0I=QD^3Q^{-1}+a_2QD^2Q^{-1}+a_1QDQ^{-1}+a_0I$

On a donc :

$$P(A)=QD^3Q^{-1}+a_2QD^2Q^{-1}+a_1QDQ^{-1}+a_0QIQ^{-1}$$

Grâce aux propriétés du calcul matriciel, on en déduit :

$$P(A)=Q\left(D^3+a_2D^2+a_1D+a_0I\right)Q^{-1}$$

Comme la matrice entre parenthèses est nulle, on conclut :

$$\boxed{P(A)=0}$$

5) a) On a : $B_2 = B_1 A + d_2 I = (A + d_1 I)A + d_2 I$.

$$\boxed{B_2 = A^2 + d_1 A + d_2 I}$$

On a : $B_3 = B_2 A + d_3 I = (A^2 + d_1 A + d_2 I)A + d_3 I$

$$\boxed{B_3 = A^3 + d_1 A^2 + d_2 A + d_3 I}$$

b) • Par définition de B_1 et de d_2, on a :

$d_2 = -\frac{1}{2}\mathrm{Tr}(B_1 A) = -\frac{1}{2}\mathrm{Tr}(A^2 + d_1 A)$.

On en déduit, grâce à la question 1b) : $d_2 = -\frac{1}{2}\mathrm{Tr}(A^2) - \frac{d_1}{2}\mathrm{Tr}(A)$

Comme $d_1 = -\mathrm{Tr}(A)$, on trouve :

$$\boxed{d_2 = -\frac{1}{2}\mathrm{Tr}(A^2) + \frac{1}{2}(\mathrm{Tr}(A))^2}$$

• Par définition de B_2 et de d_3, on a :

$$d_3 = -\frac{1}{3}\mathrm{Tr}(B_2 A) = -\frac{1}{3}\mathrm{Tr}(B_1 A^2 + d_2 A) = -\frac{1}{3}\mathrm{Tr}(A^3 + d_1 A^2 + d_2 A)$$

On en déduit, toujours avec la question 1b) :

$$d_3 = -\frac{1}{3}\mathrm{Tr}(A^3) - \frac{d_1}{3}\mathrm{Tr}(A^2) - \frac{d_2}{3}\mathrm{Tr}(A)$$

Comme $d_1 = -\mathrm{Tr}(A)$ et $d_2 = -\frac{1}{2}\mathrm{Tr}(A^2) + \frac{1}{2}(\mathrm{Tr}(A))^2$, on trouve :

$$d_3 = -\frac{1}{3}\mathrm{Tr}(A^3) + \frac{1}{3}\mathrm{Tr}(A)\mathrm{Tr}(A^2) + \frac{1}{6}\mathrm{Tr}(A^2)\mathrm{Tr}(A) - \frac{1}{6}(\mathrm{Tr}(A))^3$$

Finalement, on a :

$$\boxed{d_3 = -\frac{1}{3}\mathrm{Tr}(A^3) + \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(A)\mathrm{Tr}(A^2) - \frac{1}{6}(\mathrm{Tr}(A))^3}$$

6) a) • D'après la question 3c), on sait que $\mathrm{Tr}(A) = -a_2$ et, par définition, on a $d_1 = -\mathrm{Tr}(A)$, donc :

$$\boxed{d_1 = a_2}$$

• Toujours d'après la question 3c), on sait que $\mathrm{Tr}(A^2) = a_2^2 - 2a_1$ et, d'après la question 5b), on a $d_2 = -\frac{1}{2}\mathrm{Tr}(A^2) + \frac{1}{2}(\mathrm{Tr}(A))^2$ donc :

$d_2 = -\frac{1}{2}(a_2^2 - 2a_1) + \frac{1}{2}a_2^2$.

Après simplification, on a :

$$\boxed{d_2 = a_1}$$

• Une fois encore, d'après la question 3c), on a $\mathrm{Tr}\left(A^3\right)=-a_2^3+3a_1a_2-3a_0$ et, d'après la question 5b), on a $d_3=-\frac{1}{3}\mathrm{Tr}\left(A^3\right)+\frac{1}{2}\mathrm{Tr}(A)\mathrm{Tr}\left(A^2\right)-\frac{1}{6}\left(\mathrm{Tr}(A)\right)^3$ donc :

$$d_3=-\frac{1}{3}\left(-a_2^3+3a_1a_2-3a_0\right)+\frac{1}{2}(-a_2)\left(a_2^2-2a_1\right)-\frac{1}{6}(-a_2)^3$$

Après simplification, on a :

$$\boxed{d_3=a_0}$$

b) On sait que $B_3=A^3+d_1A^2+d_2A+d_3I$ et, en remplaçant grâce à la question 6a), on obtient : $B_3=A^3+a_2A^2+a_1A+a_0I=P(A)$

Comme $P(A)=0$, on en déduit :

$$\boxed{B_3=0}$$

7) a) Les valeurs propres de A sont toutes différentes de 0 donc A est inversible.

b) La relation $P(A)=0$ s'écrit : $A^3+a_2A^2+a_1A+a_0I=0$.

En arrangeant un peu, on en déduit :

$$\left(A^2+a_2A+a_1I\right)A=-a_0I$$

Comme les valeurs propres de A sont différentes de 0, leur produit est aussi différent de 0 et, comme $a_0=-\lambda_1\lambda_2\lambda_3$, on a : $a_0\neq 0$

Dès lors, on peut écrire :

$$\frac{-1}{a_0}\left(A^2+a_2A+a_1I\right)A=I$$

On peut conclure :

$$A^{-1}=\frac{-1}{a_0}\left(A^2+a_2A+a_1I\right)$$

Comme $d_1=a_2$, $d_2=a_1$ et $d_3=a_0$, on a finalement :

$$\boxed{A^{-1}=\frac{-1}{d_3}\left(A^2+d_1A+d_2I\right)}$$

8) a) On a :

$A-I=\begin{pmatrix}2&1&0\\2&2&2\\0&1&2\end{pmatrix}$: $C_1+C_3=2C_2$ donc $A-I$ n'est pas inversible et 1 est valeur propre de A.

$A-3I=\begin{pmatrix}0&1&0\\2&0&2\\0&1&0\end{pmatrix}$: $C_1=C_3$ donc $A-3I$ n'est pas inversible et 3 est valeur propre de A.

$A-5I=\begin{pmatrix}-2&1&0\\2&-2&2\\0&1&-2\end{pmatrix}$: $C_1+C_3=-2C_2$ donc $A-5I$ n'est pas inversible et 5 est valeur propre de A.

Conclusion :

$$\boxed{\text{Les valeurs propres de } A \text{ sont } 1,\ 3 \text{ et } 5}$$

b) Il faut se souvenir que :

- D'une part : $a_0 = -\lambda_1\lambda_2\lambda_3$, $a_1 = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_1\lambda_3$, $a_2 = -\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3$
- D'autre part : $\mathrm{Tr}(A) = -a_2$, $\mathrm{Tr}(A^2) = a_2^2 - 2a_1$ et $\mathrm{Tr}(A^3) = -a_2^3 + 3a_1a_2 - 3a_0$.

D'après le premier point, on a : $a_0 = -15$, $a_1 = 23$, $a_2 = -9$.

Conclusion :

$$\boxed{\mathrm{Tr}(A) = 9,\ \mathrm{Tr}(A^2) = 35 \text{ et } \mathrm{Tr}(A^3) = -261}$$

c) Comme $d_1 = a_2$, $d_2 = a_1$ et $d_3 = a_0$, on a :

$$\boxed{d_3 = -15,\ d_2 = 23,\ d_1 = -9}$$

D'après la question 7b), on sait que : $A^{-1} = \frac{-1}{d_3}\left(A^2 + d_1A + d_2I\right)$. En remplaçant, on obtient :

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{15}\left(A^2 - 9A + 23I\right)}$$

d) On a : $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 6 & 2 \\ 12 & 13 & 12 \\ 2 & 6 & 11 \end{pmatrix}$

On en déduit :

$$A^2 - 9A + 23I = \begin{pmatrix} 11 & 6 & 2 \\ 12 & 13 & 12 \\ 2 & 6 & 11 \end{pmatrix} - 9\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} + 23\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -3 & 2 \\ -6 & 9 & -6 \\ 2 & -3 & 7 \end{pmatrix}.$$

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 7 & -3 & 2 \\ -6 & 9 & -6 \\ 2 & -3 & 7 \end{pmatrix}}$$

Vérification : on effectue le produit de A par A^{-1} :

$$AA^{-1} = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & -3 & 2 \\ -6 & 9 & -6 \\ 2 & -3 & 7 \end{pmatrix} = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 15 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 15 \end{pmatrix}$$

On a bien :

$$\boxed{AA^{-1} = I}$$