CONCOURS PREMASTER EDHEC

SAMEDI 05 AVRIL 2025

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Durée de l'épreuve : 3 heures

Coefficient : 4

Aucun document ou matériel électronique n'est autorisé.

Le sujet comporte 3 exercices

Consignes

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice 1

Toutes les matrices en jeu dans cet exercice sont éléments de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

On rappelle que la trace d'une matrice M, notée $\mathrm{Tr}(M)$, est la somme de ses éléments diagonaux.

On pose $I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ et $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

Le but de cet exercice est de trouver les matrices B et C de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant :

$$BC = A \text{ et } B^2 = C^2 = I$$

1) Dans cette question, on se propose de démontrer un résultat connu.
   a) Soit M et N deux matrices quelconques de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, montrer que $\mathrm{Tr}(MN)=\mathrm{Tr}(NM)$.
   b) En déduire que deux matrices semblables de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ont même trace.

Dans les questions 2), 3) et 4), on considère deux matrices B et C solutions du problème posé.

2) Montrer que si $C=I$ ou $C=-I$, le problème posé n'a pas de solution.
On suppose donc dans toute la suite que $C\neq I$ et $C\neq -I$.

3) a) Montrer que C admet comme valeurs propres les réels 1 et -1.
   b) En déduire que C est diagonalisable et donner la valeur de $\mathrm{Tr}(C)$.
   c) Donner sans calcul la valeur de $\mathrm{Tr}(B)$.

4) a) Montrer que $B=AC$.
   b) Justifier que l'on peut poser $C=\begin{pmatrix}a & b\\ c & -a\end{pmatrix}$, où a, b et c sont trois réels.
   c) En déduire l'écriture de B en fonction de a, b et c, puis utiliser certains des résultats précédents pour montrer que $c=0$ et que $a\in\{-1,1\}$.
   d) En déduire les matrices B et C.

5) Conclure quant à l'objectif de cet exercice.

Exercice 2

Partie 1 : préliminaires

1) On désigne par p et q deux entiers naturels. Établir par récurrence sur q, l'égalité :

$$\forall q\geq p,\ \sum_{k=p}^{q}\binom{k}{p}=\binom{q+1}{p+1}$$

2) On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires, mutuellement indépendantes, et suivant toutes la loi géométrique de paramètre x, où x est un réel de $]0,1[$.
   a) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose $S_n = X_1+X_2+\ldots+X_n$. Montrer, par récurrence sur n, que la loi de S_n est donnée par : $\forall k\in [\![n,+\infty[\![,\ P(S_n=k)=\binom{k-1}{n-1}x^n(1-x)^{k-n}$
   b) En déduire, pour tout entier naturel n non nul :

$$\sum_{k=n}^{+\infty}\binom{k-1}{n-1}(1-x)^k=\frac{(1-x)^n}{x^n}$$

Partie 2

On désigne par p un réel de $]0,1[$ et on pose $q=1-p$.

On lance une pièce qui donne "Pile" avec la probabilité p et qui donne "Face" avec la probabilité q.

Si le premier "Pile" apparaît au lancer numéro k ($k\in\mathbb{N}^*$), on procède à k tirages d'une boule dans une urne contenant une boule noire et une boule blanche, avec remise de la boule tirée dans l'urne après chaque tirage.

On note N la variable aléatoire égale au rang du premier "Pile" et Z le nombre de boules blanches obtenues à l'issue de cette expérience.

3) Rappeler la loi suivie par N et donner son espérance et sa variance.

4) a) Pour tout k de $\mathbb{N}^*$, déterminer la loi de Z, conditionnellement à l'événement $(N=k)$.

b) Établir que $P(Z=0)=\dfrac{p}{2-q}$.

c) Utiliser la deuxième question du préliminaire pour établir que :

$$\forall i\in\mathbb{N}^*,\ P(Z=i)=2\,\frac{pq^{i-1}}{(2-q)^{i+1}}$$

d) Montrer que Z possède une espérance et écrire $E(Z)$ le plus simplement possible en fonction seulement de p.

Exercice 3

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $u_n=\dfrac{(-1)^n}{n}$.

L'objectif de ce problème est de montrer que la série de terme général u_n est convergente, de donner un équivalent, lorsque n est au voisinage de $+\infty$, de son reste $r_n=\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k}$, puis de montrer que la série de terme général r_n converge et enfin de prouver le résultat suivant concernant la somme de cette série : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k}=-\frac{1}{2}$.

Partie 1 : résultats préliminaires

1) a) Pour tout entier naturel n non nul, justifier l'existence de $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{k^2}$.

b) Montrer que : $\forall n\geq 2$, $\dfrac{1}{n}\leq\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{k^2}\leq\frac{1}{n-1}$.

2) Pour tout entier naturel n non nul, on pose $S_n=\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{2k(2k+1)}$.

Déduire de la question précédente que $S_n\underset{+\infty}{\sim}\dfrac{1}{4n}$.

Partie 2 : existence de r_n.

1ère méthode

3) a) Pour tout entier naturel n non nul et pour tout $t\neq 1$, calculer $\displaystyle\sum_{p=1}^{n}t^{p-1}$.

b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{(-1)^p}{p} = -\ln(2) + \int_{-1}^{0} \frac{t^n}{1-t}\,\mathrm{d}t$.

c) Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_{-1}^{0} \frac{t^n}{1-t}\,\mathrm{d}t = 0$.

4) Justifier enfin, pour tout entier naturel n non nul, l'existence de r_n.

2ème méthode

5) Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite décroissante de limite nulle. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\sigma_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^k v_k$.

Montrer que (σ_{2n}) et (σ_{2n+1}) sont adjacentes et en déduire que (σ_n) est convergente.

6) Retrouver ainsi l'existence de r_n pour tout entier naturel n non nul.

Partie 3 : recherche d'un équivalent de r_n.

7) Pour tout entier naturel n non nul et pour tout entier naturel p, on pose $r_{2n}(p) = \displaystyle\sum_{k=2n}^{2n+p} \frac{(-1)^k}{k}$.

a) Montrer que $\displaystyle\lim_{p\to+\infty} r_{2n}(2p) = S_n$.

b) Montrer également que $\displaystyle\lim_{p\to+\infty} r_{2n}(2p+1) = S_n$.

c) Conclure en donnant un équivalent de r_{2n} lorsque n est au voisinage de $+\infty$.

8) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $w_n = 2n(-1)^n r_n$.

a) Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} w_{2n}$.

b) En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} w_{2n+1}$.

c) Donner enfin un équivalent de r_n lorsque n est au voisinage de $+\infty$.

Partie 4 : étude de la série de terme général r_n.

Pour tout entier naturel n non nul, on pose $R_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} r_k$.

9) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $R_n = \displaystyle\sum_{p=1}^{n} (-1)^p + n\, r_{n+1}$.

10) a) En utilisant le résultat de la partie 3, montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} R_{2n} = -\frac{1}{2}.$$

b) En déduire que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} R_{2n+1} = -\frac{1}{2}$.

c) Conclure.

CONCOURS EDHEC

CONCOURS PRÉ MASTER

SAMEDI 05 AVRIL 2025

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

CORRIGÉ

Exercice 1

1.a) En notant $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ où $(a, b, c, d, x, y, z, t) \in \mathbb{R}^8$, on a :

$$MN = \begin{pmatrix} ax + bz & ay + bt \\ cx + dz & cy + dt \end{pmatrix} \text{ et } NM = \begin{pmatrix} xa + yc & xb + yd \\ za + tc & zb + td \end{pmatrix}$$

On a donc :

$$\mathrm{Tr}(MN) = ax + bz + cy + dt \ \text{ et } \ \mathrm{Tr}(NM) = xa + yc + zb + td$$

On constate que :

$$\boxed{\mathrm{Tr}(MN) = \mathrm{Tr}(NM)}$$

1.b) Considérons M et N deux matrices semblables de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Il existe alors une matrice inversible P de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $M = P^{-1}NP$. En utilisant le résultat de la question précédente, on a :

$$\mathrm{Tr}(M) = \mathrm{Tr}(P^{-1}NP) = \mathrm{Tr}(PP^{-1}N) = \mathrm{Tr}(N)$$

On peut alors conclure :

$$\boxed{\text{Deux matrices semblables de } \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \text{ ont la même trace}}$$

2. Supposons que $C = I$. Puisque $BC = A$, alors $B = A$ et donc :

$$B^2 = A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Puisque $B^2 \neq I$, alors le problème n' pas de solution.

De même, si $C = -I$, alors $B = -A$ et donc $B^2 = A^2$: on aboutit à la même conclusion.

On peut alors résumer :

$$\boxed{\text{Si } C = I \text{ ou } C = -I, \text{ alors le problème n'a pas de solution}}$$

3.a) Puisque $C^2 = I$, alors $(C - I)(C + I) = 0$.

- Supposons que 1 n'est pas une valeur propre de C.

  Alors $C - I$ est inversible et donc, en multipliant à gauche par $(C - I)^{-1}$, on a $C + I = 0$, soit $C = -I$, ce qui est absurde. On en déduit que 1 est une valeur propre de C.

- Supposons que -1 n'est pas une valeur propre de C.

  Alors $C + I$ est inversible et donc, en multipliant à droite par $(C + I)^{-1}$, on a $C - I = 0$, soit $C = I$, ce qui est absurde. On en déduit que -1 est une valeur propre de C.

Par ailleurs, $C \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ donc C admet au plus deux valeurs propres distinctes. On peut dès lors conclure :

$$\boxed{\text{La matrice } C \text{ admet comme valeurs propres 1 et } -1}$$

3.b) La matrice C appartient à $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et possède deux valeurs propres distinctes, donc elle est diagonalisable. En outre, elle est semblable à une matrice diagonale D qui possède sur sa diagonale les valeurs propres de C. D'après le résultat de la question 1.b), on a :

$$\mathrm{Tr}(C) = \mathrm{Tr}(D) = -1 + 1 = 0$$

Concluons :

$$\boxed{C \text{ est diagonalisable et } \mathrm{Tr}(C) = 0}$$

3.c) En procédant comme à la question 2, on montre que si $B = I$ ou si $B = -I$, alors le problème n'a pas de solution. On en déduit avec les mêmes arguments qu'à la question 3.a) que B admet comme valeurs propres les réels 1 et -1, puis comme en 3.b) que B est diagonalisable et semblable à la matrice D évoquée à la question précédente. On a donc $\mathrm{Tr}(B) = \mathrm{Tr}(D) = 0$.

Ainsi,

$$\boxed{\mathrm{Tr}(B) = 0}$$

4.a) On a $A = BC$. On multiplie à droite par C :

$$AC = BC^2$$

Or, $C^2 = I_2$, donc :

$$\boxed{B = AC}$$

4.b) La matrice C appartient à $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, donc elle est de la forme

$$C = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$$

Or, on a vu à la question 3.b) que $\mathrm{Tr}(C) = 0$, c'est-à-dire : $a + d = 0$, soit : $d = -a$.

Conclusion :

$$\boxed{C \text{ est de la forme } \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}, (a, b, c) \in \mathbb{R}^3}$$

4.c) On déduit de la question 4.a) que

$$B = AC = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$$

Tous calculs faits :

$$\boxed{B = \begin{pmatrix} a + c & b - a \\ c & -a \end{pmatrix}}$$

On a vu à la question 3.c) que $\mathrm{Tr}(B) = 0$, donc $c = 0$:

$$B = \begin{pmatrix} a & b - a \\ 0 & -a \end{pmatrix}$$

Enfin, $B^2 = I$, donc

$$\begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On en déduit que $a^2 = 1$, c'est-à-dire que $a \in \{-1,1\}$.

En résumé :

$$\boxed{c = 0 \text{ et } a \in \{-1,1\}}$$

4.d) Plus précisément :

- Si $a = 1$, alors

$$B = \begin{pmatrix} 1 & b - 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Puisque $B^2 = I_2$ et puisque $BC = A$, alors :

$$C = B^2C = BA = \begin{pmatrix} 1 & b - 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- Si $a = -1$, alors
$$B = \begin{pmatrix} -1 & b+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
Avec les mêmes arguments :
$$C = B^2C = BA = \begin{pmatrix} -1 & b+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Conclusion :

Les seules solutions possibles de ce problème sont :
$$B = \begin{pmatrix} 1 & b-1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } C = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & -1 \end{pmatrix} ; b \in \mathbb{R}$$
ou bien
$$B = \begin{pmatrix} -1 & b+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } C = \begin{pmatrix} -1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ; b \in \mathbb{R}$$

5. Pour résoudre le problème, il reste à tester les seules matrices candidates au titre de solution et qui ont été mises en évidence à la question précédente.

Soit donc $b \in \mathbb{R}$.
$$\begin{pmatrix} 1 & b-1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A \text{ et } \begin{pmatrix} 1 & b-1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I, \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$
On en déduit que :
$$B = \begin{pmatrix} 1 & b-1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } C = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ sont effectivement solutions du problème}$$
$$\begin{pmatrix} -1 & b+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A \text{ et } \begin{pmatrix} -1 & b+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I, \begin{pmatrix} -1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$
On en déduit que :
$$B = \begin{pmatrix} -1 & b+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } C = \begin{pmatrix} -1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ sont aussi solutions du problème}$$

Bilan :

Les solutions du problème sont les matrices de la forme :
$$B = \begin{pmatrix} 1 & b-1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } C = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & -1 \end{pmatrix} ; b \in \mathbb{R}$$
ou bien
$$B = \begin{pmatrix} -1 & b+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } C = \begin{pmatrix} -1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ; b \in \mathbb{R}$$

Exercice 2

Partie 1 : préliminaires

1. Soit $p \in \mathbb{N}$. Pour tout entier $q \geq p$, on note $\mathcal{P}(q)$ la proposition :
$$\text{« } \sum_{k=p}^{q} \binom{k}{p} = \binom{q+1}{p+1} \text{ »}$$

- $\binom{p}{p} = \binom{p+1}{p+1} = 1$ donc $\mathcal{P}(p)$ est vraie.

- Soit un entier $q \geq p$ tel que $\mathcal{P}(q)$ est vraie. On a alors :

$$\begin{aligned}\sum_{k=p}^{q+1} \binom{k}{p} &= \sum_{k=p}^{q} \binom{k}{p} + \binom{q+1}{p} \\ &= \binom{q+1}{p+1} + \binom{q+1}{p} \quad \text{(d'après } \mathcal{P}(q)\text{)} \\ &= \binom{q+2}{p+1} \quad \text{(formule de Pascal)}\end{aligned}$$

  On en déduit que $\mathcal{P}(q+1)$ est vraie.

- Par récurrence, $\mathcal{P}(q)$ est vraie, quel que soit l'entier $q \leq p$.

Bilan :

$$\boxed{\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2, p \leq q, \qquad \sum_{k=p}^{q} \binom{k}{p} = \binom{q+1}{p+1}}$$

2.a) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{P}(n)$ la proposition :

« $S_n(\Omega) = [\![n, +\infty[\![$ et, pour tout $k \geq n$, $P(S_n = k) = \binom{k-1}{n-1} x^n (1-x)^{k-n}$ »

- $S_1 = X_1$ donc S_1 suit la loi géométrique $\mathcal{G}(x)$. Or, pour $n = 1$, on a :

$$\forall k \geq 1, \qquad \binom{k-1}{n-1} x^n (1-x)^{k-n} = \binom{0}{n-1} x^1 (1-x)^{k-1} = x(1-x)^{n-1}$$

  On en déduit que $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

  On a $S_{n+1} = S_n + X_{n+1}$. Or, $S_n(\Omega) = [\![n, +\infty[\![$ et $X_{n+1}(\Omega) = [\![1, +\infty[\![$. Puisque S_n et X_{n+1} sont indépendantes (par le lemme des coalitions), alors $S_{n+1}(\Omega) = [\![n+1, +\infty[\![$.

  Soit alors un entier $k \geq n+1$. $\{[S_n = i]; i \geq n\}$ est un système complet d'événements. Par la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}P(S_{n+1} = k) &= \sum_{i=n}^{+\infty} P([S_{n+1} = k] \cap [S_n = i]) \\ &= \sum_{i=n}^{+\infty} P([S_n = i] \cap [X_{n+1} = k - i]) \\ &= \sum_{i=n}^{+\infty} P(S_n = i) P(X_{n+1} = k - i) \quad \begin{pmatrix}\text{par indépendance} \\ \text{de } S_n \text{ et de } X_{n+1}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

  Or, $P(X_{n+1} = k - i) = x(1-x)^{k-i}$ si $k - i \geq 1$, c'est-à-dire $i \leq k-1$, et $P(X_{n+1} = k - i) = 0$ sinon.

$$P(S_{n+1} = k) = \sum_{i=n}^{k-1} \binom{i-1}{n-1} x^n (1-x)^{i-n} x (1-x)^{k-i-1} = x^{n+1} (1-x)^{n-k-1} \sum_{i=n}^{k-1} \binom{i-1}{n-1}$$

  On change d'indice :

$$P(S_{n+1} = k) = x^{n+1} (1-x)^{n-k-1} \sum_{i=n-1}^{k-2} \binom{i}{n-1}$$

  Appliquons la formule obtenue dans la partie préliminaire ($n - 1 \in \mathbb{N}$ et $k - 2 \geq n - 1$) :

$$\sum_{i=n-1}^{k-2} \binom{i}{n-1} = \binom{k-1}{n}$$

On a donc :

$$P(S_{n+1} = k) = \binom{k-1}{n} x^{n+1}(1-x)^{n-k-1}$$

On en déduit que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

- Par récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie quel que soit l'entier $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n(\Omega) = [\![n, +\infty[\![\text{ et, pour tout } k \geq n, P(S_n = k) = \binom{k-1}{n-1} x^n (1-x)^{k-n}}$$

2.b) Puisque S_n est une variable aléatoire, alors :

$$\sum_{k \in S_n(\Omega)} P(S_n = k) = 1 \qquad \text{i.e.} \qquad \sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k-1}{n-1} x^n (1-x)^{k-n} = 1$$

En multipliant de part et d'autre par $(1-x)^n$ et en divisant par x^n (permis car $x \neq 0$), on a :

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k-1}{n-1} \frac{(1-x)^n}{x^n} x^n (1-x)^{k-n} = \frac{(1-x)^n}{x^n}$$

d'où, en simplifiant :

$$\boxed{\sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k-1}{n-1} (1-x)^k = \frac{(1-x)^n}{x^n}}$$

Partie 2

3. La variable N désigne le rang d'apparition du premier « succès » (le Pile sort, de probabilité p) dans une répétition indéfinie d'épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes (les lancers de la pièce). On en déduit que :

$$\boxed{\text{La variable } N \text{ suit la loi géométrique } \mathcal{G}(p)}$$

Et, d'après le cours :

$$\boxed{E(N) = \frac{1}{p} \text{ et } V(N) = \frac{1-p}{p^2}}$$

4.a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Si $[N = k]$ est réalisé, alors on procède à k tirages dans l'urne et Z compte alors le nombre de « succès » (cette fois : tirer une boule blanche, de probabilité $1/2$) dans la répétition de k épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes (constituées par les k tirages). On en déduit que

$$\boxed{\text{La loi conditionnelle de } Z \text{ sachant } [N = k] \text{ est la loi binomiale } \mathcal{B}(k, 1/2)}$$

4.b) D'après la question 3, $\{[N = k] ; k \in \mathbb{N}^*\}$ est un système complet d'événements de probabilités non nulles. Par la formule des probabilités totales :

$$P(Z = 0) = \sum_{k=1}^{+\infty} P_{[N=k]}(Z = 0) P(N = k) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k p q^{k-1} = \frac{p}{2} \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{q}{2}\right)^{k-1} = \frac{p}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{q}{2}\right)^k$$

On a pu conduire ainsi les calculs car $0 \leq q/2 \leq q < 1$. On reconnaît une série géométrique :

$$P(Z = 0) = \frac{p}{2} \times \frac{1}{1 - \frac{q}{2}}$$

En simplifiant :

$$\boxed{P(Z=0)=\frac{p}{2-q}}$$

4.c) Soit $i\in\mathbb{N}^*$. On procède de même, avec le même système complet d'événements.

$$P(Z=i)=\sum_{k=1}^{+\infty}P_{[N=k]}(Z=i)P(N=k)$$

Or, $P_{[N=k]}(Z=i)=\binom{k}{i}(1/2)^k$ si $i\leq k$, c'est-à-dire si $k\geq i$, et , $P_{[N=k]}(Z=i)=0$ sinon. Ainsi,

$$P(Z=i)=\sum_{k=i}^{+\infty}\binom{k}{i}\left(\frac{1}{2}\right)^k pq^{k-1}=\sum_{k=i+1}^{+\infty}\binom{k-1}{i}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}pq^{k-2}=\frac{2p}{q^2}\sum_{k=i+1}^{+\infty}\binom{k-1}{i}\left(\frac{q}{2}\right)^k$$

On applique alors le résultat de la question 2.b) (avec $i+1$ à la place de n, possible car $i+1\geq 2\geq 1$ et $q/2$ à la place de x, possible car $0<q/2<1/2<1$) :

$$P(Z=i)=\frac{2p}{q^2}\times\frac{\left(\frac{q}{2}\right)^{i+1}}{\left(1-\frac{q}{2}\right)^{i+1}}=\frac{2p}{q^2}\times\frac{q^{i+1}}{(2-q)^{i+1}}$$

On simplifie un peu :

$$\boxed{P(Z=i)=\frac{2pq^{i-1}}{(2-q)^{i+1}}}$$

4.d) La variable aléatoire Z admet une espérance si, et seulement si, la série $\sum iP(Z=i)$ converge absolument (la convergence suffira puisque tous les termes sont positifs). On a alors :

$$\forall i\in\mathbb{N}^*,\qquad iP(Z=i)=i\frac{2pq^{i-1}}{(2-q)^{i+1}}=\frac{2p}{(2-q)^2}\times i\left(\frac{q}{2-q}\right)^{i-1}$$

Or,

$$0<\frac{q}{2-q}=\frac{1-p}{1+p}<1$$

On reconnaît alors une série géométrique dérivée d'ordre 1 convergente. La variable Z admet donc une espérance et on a :

$$E(Z)=\sum_{i=1}^{+\infty}iP(Z=i)=\frac{2p}{(2-q)^2}\sum_{i=0}^{+\infty}i\left(\frac{q}{2-q}\right)^{i-1}=\frac{2p}{(2-q)^2}\times\frac{1}{\left(1-\frac{q}{2-q}\right)^2}=\frac{2p}{(2-2q)^2}=\frac{1}{2p}$$

Bilan :

$$\boxed{\text{La variable } Z \text{ admet une espérance et } E(Z)=\frac{1}{2p}}$$

EDHEC BUSINESS SCHOOL

Exercice 3

Partie 1 : résultats préliminaires

1.a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La série $\sum 1/k^2$ est une série de Riemann de paramètre $\alpha = 2$, convergente car $\alpha > 1$. Les premiers termes font changer la valeur de la somme de la série mais pas sa nature, donc :

$$\boxed{\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \text{ existe, quel que soit } n \in \mathbb{N}^*}$$

1.b) Soit un entier $n \geq 2$ et un entier $k \geq n$. On a :

$$0 < k(k-1) \leq k^2 \leq k(k+1)$$

La fonction inverse décroît sur $\mathbb{R}_+^*$, donc :

$$\frac{1}{k(k+1)} \leq \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)} \quad \text{i.e.} \quad \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$

On en déduit que, pour tout entier $N > n$:

$$\sum_{k=n}^{N} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \leq \sum_{k=n}^{N} \frac{1}{k^2} \leq \sum_{k=n}^{N} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right)$$

Les termes des sommes à gauche et à droite se télescopent :

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{N+1} \leq \sum_{k=n}^{N} \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{n-1} - \frac{1}{N}$$

On prolonge alors ces inégalités par passage à la limite quand $N \to +\infty$:

$$\boxed{\frac{1}{n} \leq \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{n-1}}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et un entier $k \geq n$. On a :

$$0 < (2k)^2 \leq 2k(2k+1) \leq (2k+2)^2$$

On peut de nouveau inverser :

$$\frac{1}{(2k+2)^2} \leq \frac{1}{2k(2k+1)} \leq \frac{1}{(2k)^2} \quad \text{i.e.} \quad \frac{1}{4(k+1)^2} \leq \frac{1}{2k(2k+1)} \leq \frac{1}{4k^2}$$

Or,

$$\frac{1}{4(k+1)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{4k^2}, \qquad \frac{1}{2k(2k+1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{4k^2}, \qquad \frac{1}{4k^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{4k^2}$$

La série $\sum 1/k^2$ est une série de Riemann, de paramètre $\alpha = 2$, convergente car $\alpha > 1$, donc la série $\sum 1/4k^2$ converge également. Les séries étant à termes positifs, le critère de convergence par équivalence assure la convergence des séries :

$$\sum \frac{1}{4(k+1)^2}, \qquad \sum \frac{1}{2k(2k+1)}, \qquad \sum \frac{1}{4k^2}$$

On peut alors sommer :

$$\frac{1}{4}\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)^2} \leq \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{2k(2k+1)} \leq \frac{1}{4}\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \quad \text{i.e.} \quad \frac{1}{4}\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \leq S_n \leq \frac{1}{4}\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$$

En utilisant le résultat de la question 1.b) :

$$\frac{1}{4(n+1)} \leq S_n \leq \frac{1}{4(n-1)}$$

On divise par $1/4n$ qui est positif, on a alors :

$$\frac{n}{n+1} \leq \frac{S_n}{1/4n} \leq \frac{n}{n-1}$$

Or,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n-1} = 1$$

Par le théorème d'encadrement :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n}{1/4n} = 1$$

Conclusion :

$$\boxed{S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{4n}}$$

Partie 2 : existence de r_n

Première méthode

3.a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \neq 1$.

$$(1-t)\sum_{p=1}^{n} t^{p-1} = \sum_{p=1}^{n} (t^{p-1} - t^p) = 1 - t^n$$

Puisque $1 - t \neq 0$, alors :

$$\boxed{\sum_{p=1}^{n} t^{p-1} = \frac{1-t^n}{1-t}}$$

3.b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Les fonctions définies par les membres de l'égalité précédentes sont continues sur $[-1,0]$, on peut donc intégrer. Par linéarité de l'intégrale :

$$\sum_{p=1}^{n} \int_{-1}^{0} t^{p-1} \mathrm{d}t = \int_{-1}^{0} \frac{1}{1-t} \mathrm{d}t - \int_{-1}^{0} \frac{t^n}{1-t} \mathrm{d}t$$

d'où :

$$\sum_{p=1}^{n} \left[\frac{t^p}{p}\right]_{-1}^{0} = [-\ln|1-t|]_{-1}^{0} - \int_{-1}^{0} \frac{t^n}{1-t} \mathrm{d}t$$

soit :

$$-\sum_{p=1}^{n} \frac{(-1)^p}{p} = \ln(2) - \int_{-1}^{0} \frac{t^n}{1-t} \mathrm{d}t$$

Conclusion :

$$\boxed{\sum_{p=1}^{n} \frac{(-1)^p}{p} = -\ln(2) + \int_{-1}^{0} \frac{t^n}{1-t} \mathrm{d}t}$$

3.c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après l'inégalité triangulaire (les bornes sont bien dans l'ordre croissant) :

$$\left|\int_{-1}^{0} \frac{t^n}{1-t} \mathrm{d}t\right| \leq \int_{-1}^{0} \left|\frac{t^n}{1-t}\right| \mathrm{d}t$$

Pour tout $t \in [-1,0]$, $1-t \geq 1$ et $|t| = -t$, donc :

$$\left|\int_{-1}^{0} \frac{t^n}{1-t}\mathrm{d}t\right| \leq \int_{-1}^{0} (-t)^n \mathrm{d}t$$

Or,

$$\int_{-1}^{0} (-t)^n \mathrm{d}t = \left[-\frac{(-t)^{n+1}}{n+1}\right]_{-1}^{0} = \frac{1}{n+1}$$

Ainsi,

$$\left|\int_{-1}^{0} \frac{t^n}{1-t}\mathrm{d}t\right| \leq \frac{1}{n+1}$$

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$ alors par le théorème d'encadrement :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \int_{-1}^{0} \frac{t^n}{1-t}\mathrm{d}t = 0}$$

4. D'après les deux dernières questions,

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{p=1}^{n} \frac{(-1)^p}{p} = -\ln(2)$$

On en déduit la convergence de la série $\sum (-1)^p/p$ (ainsi que sa somme), ce qui assure l'existence de r_n quel que soit l'entier $n \in \mathbb{N}^*$.

Deuxième méthode

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- $\sigma_{2n+2} - \sigma_{2n} = v_{2n+2} - v_{2n+1} \leq 0$ (car (v_n) décroît), donc la suite (σ_{2n}) décroît.
- $\sigma_{2n+3} - \sigma_{2n+1} = -v_{2n+3} + v_{2n+2} \geq 0$, donc la suite (σ_{2n+1}) croît.
- $\sigma_{2n+1} - \sigma_{2n} = -v_{2n+1}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (\sigma_{2n+1} - \sigma_{2n}) = 0$ (car (v_n) converge vers 0)

De ces trois points, on déduit :

$$\boxed{\text{Les suites } (\sigma_{2n}) \text{ et } (\sigma_{2n+1}) \text{ sont adjacentes}}$$

D'après le théorème sur les suites adjacentes, elles convergent vers une même limite. Ainsi, les sous-suites de rangs pairs et impairs extraites de (σ_n) convergent vers une même limite, on peut alors conclure :

$$\boxed{\text{La suite } (\sigma_n) \text{ converge}}$$

6. Dans le cas particulier où la suite (v_n) est définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad v_n = \frac{1}{n} \qquad \big((v_n) \text{ est bien décroissante de limite nulle}\big)$$

la suite (σ_n) n'est autre que la suite des sommes partielles associée à la série $\sum (-1)^n/n$. Puisque, d'après la question précédente, la suite (σ_n) converge, alors la série $\sum (-1)^n/n$ converge, d'où l'existence de r_n quel que soit l'entier $n \in \mathbb{N}^*$.

Partie 3 : recherche d'un équivalent de r_n

7.a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$r_{2n}(2p) = \sum_{k=2n}^{2n+2p} \frac{(-1)^k}{k}$$

On regroupe les termes suivant la parité de l'indice k :

$$r_{2n}(2p) = \sum_{k=n}^{n+p} \frac{(-1)^{2k}}{2k} + \sum_{k=n}^{n+p-1} \frac{(-1)^{2k+1}}{2k+1} = \sum_{k=n}^{n+p} \frac{1}{2k} - \sum_{k=n}^{n+p-1} \frac{1}{2k+1} = \sum_{k=n}^{n+p} \frac{1}{2k} - \sum_{k=n}^{n+p} \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2(n+p)+1}$$

On regroupe les deux sommes :

$$r_{2n}(2p) = \sum_{k=n}^{n+p} \left(\frac{1}{2k} - \frac{1}{2k+1}\right) + \frac{1}{2(n+p)+1} = \sum_{k=n}^{n+p} \frac{1}{2k(2k+1)} + \frac{1}{2(n+p)+1}$$

Il reste à passer à la limite quand $p \to +\infty$:

$$\boxed{\lim_{p\to+\infty} r_{2n}(2p) = S_n}$$

7.b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}$.

$$r_{2n}(2p+1) = \sum_{k=2n}^{2n+2p+1} \frac{(-1)^k}{k} = \sum_{k=2n}^{2n+2p} \frac{(-1)^k}{k} + \frac{(-1)^{2n+2p+1}}{2n+2p+1} = r_{2n}(2p) - \frac{1}{2n+2p+1}$$

En passant à la limite quand $p \to +\infty$:

$$\boxed{\lim_{p\to+\infty} r_{2n}(2p+1) = S_n}$$

7.c) Récapitulons : les suites $\left(r_{2n}(2p)\right)_p$ et $\left(r_{2n}(2p+1)\right)_p$ convergent vers la même limite S_n. Ce sont les sous-suites de rangs pairs et impairs extraites de la suite $\left(r_{2n}(p)\right)_p$, donc cette suite converge elle-même vers S_n. Or, sa limite n'est autre que r_{2n} donc par unicité de la limite :

$$r_{2n} = S_n$$

D'après la question 2 :

$$\boxed{r_{2n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{4n}}$$

8.a) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $w_{2n} = 4nr_{2n}$ donc d'après la question précédente :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} w_{2n} = 1}$$

8.b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$w_{2n+1} = -2(2n+1)r_{2n+1} = -2(2n+1)\left(r_{2n} - \frac{1}{2n}\right) = -4nr_{2n} - 2r_{2n} + \frac{2n+1}{n}$$

Or,

$$\lim_{n\to+\infty} 4nr_{2n} = 1\ ;\ \lim_{n\to+\infty} r_{2n} = 0 \ \left(\text{car } r_{2n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{4n}\right)\ ;\ \lim_{n\to+\infty} \frac{2n+1}{n} = 2$$

On en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} w_{2n+1} = -1 + 2 = 1$$

Conclusion

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} w_{2n+1} = 1}$$

8.c) Les suites (w_{2n}) et (w_{2n+1}) convergent toutes deux vers le réel 1, donc la suite (w_n) converge également vers le réel 1, ce qui montre que :

$$\boxed{r_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{2n}}$$

Partie 4

9. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
R_n = \sum_{k=1}^{n} r_k &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=k}^{+\infty}\frac{(-1)^i}{i} \\
&= \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=k}^{n}\frac{(-1)^i}{i} + \sum_{i=n+1}^{+\infty}\frac{(-1)^i}{i}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=k}^{n}\frac{(-1)^i}{i} + r_{n+1}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=k}^{n}\frac{(-1)^i}{i} + nr_{n+1} \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{i}\frac{(-1)^i}{i} + nr_{n+1} \quad \text{(interversion des sommes)} \\
&= \sum_{i=1}^{n} i\,\frac{(-1)^i}{i} + nr_{n+1}
\end{aligned}$$

Il reste à simplifier par i dans la somme :

$$\boxed{R_n = \sum_{i=1}^{n}(-1)^i + nr_{n+1}}$$

10.a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$R_{2n} = \sum_{i=1}^{2n}(-1)^i + 2nr_{2n+1}$$

La somme est nulle (elle contient n termes égaux à 1 et n termes égaux à -1), donc

$$R_{2n} = 2nr_{2n+1}$$

On utilise le résultat de la fin de la partie précédente :

$$R_{2n} \underset{n\to+\infty}{\sim} 2n\frac{(-1)^{2n+1}}{2(2n+1)} \quad \text{i.e.} \quad R_{2n} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2}$$

Conclusion :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} R_{2n} = -\frac{1}{2}}$$

10.b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$R_{2n+1} = R_{2n} + r_{2n+1}$$

Or,

$$\lim_{n \to +\infty} R_{2n} = -\frac{1}{2} \text{ et } \lim_{n \to +\infty} r_{2n+1} = 0 \text{ (reste d'une série convergente)}$$

Conclusion :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} R_{2n+1} = -\frac{1}{2}}$$

10.c) Les suites (R_{2n}) et (R_{2n+1}) convergente toutes deux vers $-1/2$, donc la suite (R_n) dont elles sont extraites converge également vers $-1/2$. On a ainsi :

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} r_k = -\frac{1}{2}$$

Conclusion :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} r_n = -\frac{1}{2} \quad \text{i.e.} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} = -\frac{1}{2}}$$

CONCOURS PREMASTER EDHEC

RAPPORT DE CORRECTION 2025

Epreuve de MATHEMATIQUES

Présentation de l'épreuve.
L'épreuve, longue comme d'habitude, comportait trois exercices, ce qui permettait de juger les candidats sur la presque totalité du programme de l'épreuve : algèbre linéaire, analyse et probabilités. Les correcteurs ont trouvé le sujet adapté, sélectif et exigeant tout en respectant scrupuleusement le programme.

• L'exercice 1, portant sur le programme d'algèbre linéaire, proposait de déterminer les matrices B et C de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant $BC = A$ et $B^2 = C^2 = I$, où $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

• L'exercice 2 portait sur le programme de probabilités.

La première partie, demandait d'établir, pour $x \in \left]0,1\right[$, la formule $\sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k-1}{n-1}(1-x)^k = \frac{(1-x)^n}{x^n}$ utile pour la suite.

La deuxième partie, proposait un jeu consistant à lancer une pièce donnant "Pile" avec la probabilité $p \in \left]0,1\right[$ et "Face" avec la probabilité $q = 1-p$, puis lorsque cette pièce donnait le premier "Pile" au lancer numéro k ($k \in \mathbb{N}^*$), on procédait à k tirages d'une boule dans une urne contenant une boule noire et une boule blanche, avec remise de la boule tirée dans l'urne après chaque tirage.
On étudiait alors la variable aléatoire Z égale au nombre de boules blanches obtenues à l'issue de cette expérience.

• L'exercice 3, portant sur le programme d'analyse et comportant quatre parties, avait pour objectif de prouver la convergence de la série de terme général $r_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ ($n \in \mathbb{N}^*$), puis de donner sa somme.

Statistiques.
Cette épreuve a réuni 270 candidats (contre 291 l'année dernière).

• La moyenne obtenue à cette épreuve est de 11,34 sur 20, légèrement supérieure à celle de l'année dernière (plus 0,21 point).
• L'écart type est d'environ 4,68 (0,31 point au-dessus de l'année dernière).
• La médiane est, quant à elle, égale à 11 (sensiblement la même que l'année dernière).

• 6,3 % des candidats obtiennent une note inférieure ou égale à 4, le pourcentage était de 5,5 l'année dernière.
• 29,6 % des candidats ont entre 8 et 12 (2,7 points de moins que l'année dernière).
• 10,7 % des candidats obtiennent une note supérieure ou égale à 18 (4,9 points de plus que l'année dernière).

Analyse des copies.

- Les correcteurs constatent que les copies sont, dans l'ensemble, agréables à lire, sauf quelques unes qui ressemblent à des brouillons.
- D'un point de vue académique, ils notent que le niveau est plus hétérogène que l'année dernière, avec, plus d'excellents candidats, mais plus de candidats dont les copies sont inconsistantes, voire presque vides. Sur le plan de la rigueur, les arguments mathématiques nécessaires aux conclusions sont assez souvent escamotés.
- Les correcteurs trouvent l'ensemble d'un niveau honorable : ils s'étaient réjoui l'année dernière que de plus en plus de candidats aient travaillé les probabilités, mais en fait, ils semblent n'avoir travaillé que les variables à densité alors que cette année l'exercice de probabilités portait sur des variables discrètes d'où la déception des correcteurs.
- Les correcteurs invitent les candidats à lire le programme de cette épreuve et à le respecter à la lettre : les dépassements ont été vivement sanctionnés.

Commentaires sur les questions les plus fréquemment mal ou pas traitées.

Exercice 1

- 1) b) Ayant montré que $\mathrm{Tr}(MN)=\mathrm{Tr}(NM)$, il n'était pas question d'en déduire que $\mathrm{Tr}(P^{-1}AP)=\mathrm{Tr}(P^{-1}PA)$ ou que $\mathrm{Tr}(P^{-1}AP)=\mathrm{Tr}(AP^{-1}P)$. Il faut y réfléchir : les seules options étaient $\mathrm{Tr}(P^{-1}AP)=\mathrm{Tr}(PP^{-1}A)$ et $\mathrm{Tr}(P^{-1}AP)=\mathrm{Tr}(APP^{-1})$.
- 3) a) L'égalité $C^2=I$ ne permet pas de conclure que les valeurs propres de C sont -1 et 1 : ce ne sont que les valeurs propres possibles (même si ce polynôme est scindé à racines simples ! Ce dernier argument illustrant la grande confusion qui règne à ce sujet).
- 4) b) Cette question fut étrangement très peu et très mal traitée alors que c'est l'une des questions faciles de l'exercice : une majorité de candidats se sont contentés de vérifier que la matrice proposée convenait.
- 5) Une infime minorité de candidats ont vu que cette question était la synthèse d'un raisonnement par analyse-synthèse dont la partie analyse se concluait à la question 4d).

Exercice 2

- 1) L'initialisation de cette récurrence a été ratée par de très nombreux candidats : la première valeur possible de q était p et non pas 0.
- 2) a) Cette question n'a pratiquement jamais été traitée correctement.
- 3) Il est étrange de constater qu'un nombre impressionnant de candidats ne connaissent pas l'espérance et la variance d'une variable suivant une loi géométrique.
- 4) a) b) c) Ces questions ont décontenancé la presque totalité des candidats.
- 4) d) Trop peu de candidats pensent à prouver que l'espérance existe AVANT de la calculer ! Quant au calcul, il est rarement mené avec rigueur et encore plus rarement à son terme alors qu'il suffisait de reconnaître une série géométrique dérivée dont on connaît la somme lorsqu'elle converge.

Exercice 3

- 1) a) Peu reconnaissent le reste d'une série de Riemann convergente (car de paramètre strictement supérieur à 1).
- 1) b) L'idée de la méthode des rectangles (comparaison série/intégrale) est souvent bien identifiée mais trop de candidats, pressés d'aboutir au résultat qui est donné, manquent de rigueur, enjambent les étapes et conclut en n'ayant finalement rien prouvé ou presque rien.

- 2) Les membres du jury ont lu trop de raisonnements approximatifs et d'explications plus proches de boniments que de raisonnements rigoureux, avec, entre autres, la confusion grossière entre équivalent et égalité, confusion peut-être faite sciemment faute de trouver une réponse satisfaisante…
- 3) Un nombre étonnant d'erreurs ont été constatées sur le calcul pourtant très simple de $\sum_{k=1}^{n} t^{k-1}$, que ce soit sur le résultat ou même sur la condition portant sur *t* (la somme est finie et non infinie).
- 5) La question proposait de retrouver le critère spécial des séries alternées : l'invoquer n'était évidemment pas ici une bonne idée.
- 7) a) Cette question a connu peu de succès. Si l'idée de séparer la somme (selon la parité de l'indice) a été vue parfois, la mise en œuvre a été laborieuse.

À ce sujet, la très grave double faute a consisté à penser que, comme $r_{2n}(p) = \sum_{k=2n}^{2n+p} \frac{(-1)^k}{k}$, alors on avait $r_{2n}(2p) = \sum_{k=2n}^{2n+2p} \frac{(-1)^{2k}}{2k}$, puis à proposer le changement d'indice $i = 2k$.

- La fin, assez technique, a souvent été traitée dans la précipitation bien compréhensible de la fin d'épreuve. De ce point de vue, vouloir à toute force traiter toutes les questions « en mode dégradé » n'est peut-être pas la stratégie optimale.

Conclusion.

L'épreuve a permis de repérer et de mettre en valeur les candidats les mieux préparés et les plus aptes à trouver leur place dans des études exigeantes qui nécessitent rigueur et honnêteté intellectuelle.

Nous conseillons, comme par le passé, aux futurs candidats de se préparer d'une façon complète, en essayant de ne négliger aucun point du programme : les trois "compartiments" de ce programme (analyse, algèbre linéaire et probabilités) sont essentiels pour une bonne continuation des études à l'EDHEC, notamment en finances.