



CONCOURS PREMASTER

SAMEDI 28 MARS 2026

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Durée de l'épreuve : 3 heures

Coefficient : 4

Aucun document ou matériel électronique n'est autorisé.

Le sujet comporte 3 exercices

Consignes

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Il est demandé aux candidats d'indiquer clairement les numéros des questions traitées et de mettre leurs résultats en valeur.

Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

A l'issue de chaque composition écrite, tout candidat est tenu sous peine d'élimination, de remettre au surveillant une copie (même blanche, qui sera alors signée). La seule responsabilité du candidat est engagée dans le cas contraire. Tout candidat sortant avant la fin des épreuves doit obligatoirement remettre le sujet en même temps que sa copie.

Exercice 1

Partie 1 : questions préliminaires

On rappelle que la fonction arc tangente, notée Arctan , est la bijection réciproque de la restriction de la fonction tangente à l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et que l'on a, pour tout réel x , $\text{Arctan}'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

1) a) Donner la valeur de $\text{Arctan}(1)$.

b) Montrer que, pour tout réel x strictement positif, on a : $\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$.

2) Justifier l'équivalent suivant : $\text{Arctan}(x) \underset{0}{\sim} x$.

Partie 2 : loi de Cauchy

On considère la fonction f définie par :
$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi(1+x^2)} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

3) Vérifier que la fonction f peut être considérée comme densité d'une certaine variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. On dit que X suit la loi de Cauchy.

4) La variable aléatoire X possède-t-elle une espérance ?

5) Déterminer la fonction de répartition de F de X .

Partie 3 : une convergence en loi

On considère une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes, et suivant toutes la loi de Cauchy.

Pour tout entier naturel n non nul, on pose $M_n = \max(X_1, \dots, X_n)$ et on admet que M_n est une variable aléatoire à densité prenant ses valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.

6) Déterminer la fonction de répartition de M_n , que l'on notera F_n .

7) a) On pose $Y_n = \frac{n}{M_n}$. Déterminer la fonction de répartition de Y_n , que l'on notera G_n .

b) Utiliser les résultats de la question 1) pour montrer que la suite de variables aléatoires $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire suivant une loi exponentielle dont on donnera le paramètre.

Partie 4 : loi de Cauchy et géométrie

8) On considère un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$. On choisit un point M sur la droite (OA) de telle façon que l'angle $(\overrightarrow{BO}, \overrightarrow{BM})$ soit une variable aléatoire uniformément distribuée sur $]-\pi/2, \pi/2[$.

On admet que l'abscisse de M , notée X_M , est une variable aléatoire à densité. Déterminer la fonction de répartition de X_M puis vérifier que $|X_M|$ suit la loi de Cauchy (on admettra sans démonstration que la fonction Arctan est impaire).

Exercice 2

Les parties 2 et 3 sont indépendantes.

Partie 1 : question préliminaire

1) Montrer qu'une matrice non scalaire de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ si, et seulement si, elle possède deux valeurs propres réelles distinctes.

Partie 2 : une première diagonalisation de matrice aléatoire

On considère la matrice $A(x) = \begin{pmatrix} x & -1 \\ 1 & x^2 \end{pmatrix}$, où x désigne un nombre réel.

- 2) a) Écrire une équation vérifiée par les valeurs propres λ de la matrice $A(x)$.
b) En déduire que $A(x)$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ si, et seulement si : $(x(x-1))^2 - 4 > 0$.
- 3) Montrer que $A(x)$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ si, et seulement si : $x \in]-\infty, -1[\cup]2, +\infty[$.
- 4) Dans cette question, X est une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.
Déterminer, en fonction de λ , la probabilité p que la matrice $A(X) = \begin{pmatrix} X & -1 \\ 1 & X^2 \end{pmatrix}$ soit diagonalisable.

Partie 3 : une deuxième diagonalisation de matrice aléatoire

On considère deux réels x et y ainsi que la matrice $A(x, y) = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 0 & y \end{pmatrix}$.

- 5) Montrer que $A(x, y)$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ si, et seulement si, $x \neq y$.

Dans la suite, on considère deux variables aléatoires, X et Y , indépendantes et suivant la même loi géométrique de paramètre $\alpha \in]0, 1[$.

- 6) a) Établir l'égalité : $P(Y = X) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X = n)P(Y = n)$.
b) En déduire explicitement $P(Y = X)$ en fonction de α .
- 7) Soit $A(X, Y)$ la matrice aléatoire définie par $A(X, Y) = \begin{pmatrix} X & 1 \\ 0 & Y \end{pmatrix}$.

Déterminer, en fonction de α , la probabilité p' pour que $A(X, Y)$ soit diagonalisable.

Exercice 3

On note $E = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ (ensemble des réels non entiers) et on désigne par n un entier naturel.

- 1) Montrer que, pour tout $a \in E$, la somme $\sum_{k=-n}^n \frac{1}{a+k}$ est bien définie.

On considère désormais la fonction f_n définie sur E par :

$$\forall a \in E, f_n(a) = \sum_{k=-n}^n \frac{1}{a+k}$$

- 2) a) Montrer que : $\forall a \in E, \forall n \in \mathbb{N}^*, f_n(a) = \frac{1}{a} + \sum_{k=1}^n \frac{2a}{a^2 - k^2}$.
b) En déduire que la suite $(f_n(a))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente. Sa limite sera notée $f(a)$.
- 3) a) Montrer que l'on a l'égalité : $\forall a \in E, \forall n \in \mathbb{N}, f_n(a+1) - f_n(a) = \frac{1}{a+n+1} - \frac{1}{a-n}$.
b) En déduire que la fonction f est de période 1 sur E .

4) a) Montrer que : $\forall a \in E, \forall n \in \mathbb{N}, f_n\left(\frac{a}{2}\right) + f_n\left(\frac{a+1}{2}\right) = 2f_{2n}(a) + \frac{2}{a+2n+1}$.

b) En déduire que l'on a l'égalité : $\forall a \in E, f\left(\frac{a}{2}\right) + f\left(\frac{a+1}{2}\right) = 2f(a)$.

5) Dans cette question, on suppose que $a \in]0,1[$.

On pose $\mu = \min(a, 1-a)$, $\lambda = a + \frac{\mu}{2}$ et on considère un réel h vérifiant $|h| \leq \frac{\mu}{2}$.

a) Montrer que $\lambda < 1$ et que $a+h \in]0,\lambda]$.

b) Utiliser l'inégalité des accroissements finis appliquée à une fonction bien choisie pour établir l'inégalité : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \left| \frac{2(a+h)}{(a+h)^2 - n^2} - \frac{2a}{a^2 - n^2} \right| \leq 2|h| \times \frac{n^2 + \lambda^2}{(n^2 - \lambda^2)^2}$.

c) En déduire que : $|f(a+h) - f(a)| \leq \frac{|h|}{a(a+h)} + 2|h| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2 + \lambda^2}{(n^2 - \lambda^2)^2}$.

d) Montrer alors que la fonction f est continue sur $]0,1[$, puis qu'elle est continue sur E .

6) Dans cette question, x désigne un réel de $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

a) Démontrer l'inégalité : $\left| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{x^2 - n^2} \right| \leq 2|x| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - \frac{1}{4}}$.

b) En déduire que $\lim_{x \rightarrow 0} \left(f(x) - \frac{1}{x} \right) = 0$.

On rappelle que $\cotan(\pi x) = \frac{\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)}$ et on pose : $\forall x \in E, g(x) = f(x) - \pi \cotan(\pi x)$.

7) a) Donner l'ensemble de définition de la fonction $x \mapsto \cotan(\pi x)$.

b) On admet l'équivalent : $x \cotan(x) - 1 \underset{0}{\sim} -\frac{x^2}{3}$. En déduire la valeur de $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\pi \cotan(\pi x) - \frac{1}{x} \right)$.

c) Montrer que g est 1-périodique et continue sur E .

d) (i) Déterminer la limite de g en zéro.

(ii) En déduire que g peut se prolonger par continuité en tout $n \in \mathbb{Z}$.

On notera encore g ce prolongement et on précisera les valeurs de g sur $\mathbb{Z}$.

e) Montrer maintenant que g est 1-périodique et continue sur $\mathbb{R}$.

8) a) Montrer que, pour tout réel x , on a : $g\left(\frac{x}{2}\right) + g\left(\frac{x+1}{2}\right) = 2g(x)$.

b) Montrer que $|g|$ admet un maximum M sur $\mathbb{R}$. On pose $M = |g(\alpha)|$, où $\alpha \in \mathbb{R}$.

c) Utiliser la question 8a) pour démontrer que $\left| g\left(\frac{\alpha}{2}\right) \right| = M$.

d) En déduire que, pour tout entier naturel p , on a $\left| g\left(\frac{\alpha}{2^p}\right) \right| = M$.

e) Montrer que $M = 0$, puis conclure que g est la fonction nulle.

f) Établir finalement l'égalité suivante :

$$\forall a \in E, \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2a}{a^2 - n^2} = \pi \cotan(\pi a) - \frac{1}{a}$$

CONCOURS PRÉ MASTER

SAMEDI 28 MARS 2026

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

CORRIGÉ

Exercice 1

Partie 1

1) a) Comme $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$, on en déduit $\text{Arctan}(1) = \frac{\pi}{4}$.

1) b) En notant φ la fonction $x \mapsto \text{Arctan}(x) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)$, φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et on trouve $\varphi'(x) = 0$. Ainsi, φ est constante sur $\mathbb{R}_+^*$, et comme $\varphi(1) = \frac{\pi}{2}$, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \text{Arctan}(x) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$$

2) La fonction Arctan est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et d'après la formule de Taylor-Young, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \text{Arctan}(x) = \text{Arctan}(0) + x \text{Arctan}'(0) + o(x) = x + o(x) \underset{0}{\sim} x$$

Partie 2

3) • La fonction f est nulle donc positive sur $\mathbb{R}_-^*$ et est bien définie et positive sur $\mathbb{R}_+$ car $1 + x^2 > 0$.

Ainsi, f est positive sur $\mathbb{R}$.

- La restriction de f à $\mathbb{R}_-^*$ est nulle donc continue sur $\mathbb{R}_-^*$.

La restriction de f à $\mathbb{R}_+$ est une fonction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+$ donc elle est continue sur $\mathbb{R}_+$.

Ainsi, f est continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0.

- De plus, pour tout réel A positif, on a : $\int_0^A \frac{2}{\pi(1+x^2)} dx = \frac{2}{\pi} [\text{Arctan}(x)]_0^A = \frac{2}{\pi} (\text{Arctan}(A))$.

Comme $\lim_{A \rightarrow +\infty} \text{Arctan } A = \frac{\pi}{2}$, on conclut que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ converge et vaut 1.

Bilan : f est bien une densité.

- Pour finir, comme f est nulle sur $\mathbb{R}_-^*$, c'est une densité d'une variable aléatoire X ne prenant que des valeurs positives.

4) Comme f est nulle sur $\mathbb{R}_-^*$, X possède une espérance si, et seulement si, l'intégrale $\int_0^{+\infty} x f(x) dx$ est absolument convergente (donc convergente car la fonction intégrée est positive). Or $x f(x) = \frac{2}{\pi} \times \frac{x}{1+x^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{2}{\pi} \times \frac{1}{x}$ et comme l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$ est divergente, X n'a pas d'espérance.

5) Avec la définition, on trouve :

$$F(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \text{Arctan}(x) & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Partie 3

6) Comme $M_n = \text{Max}(X_1, X_2, \dots, X_n)$, dire que la variable prenant la plus grande des valeurs prises par $X_1, X_2, \dots, X_n$ (il s'agit de M_n) prend une valeur inférieure ou égale à x , c'est dire que chacune des variables $X_1, X_2, \dots, X_n$ a pris une valeur inférieure ou égale à x (sinon, M_n ne serait pas inférieure ou égale à x).

On a donc, pour tout réel x , $(M_n \leq x) = \bigcap_{k=1}^n (X_k \leq x)$, et par mutuelle indépendance des variables $X_1, \dots, X_n$, on en déduit :

$$P(M_n \leq x) = \prod_{k=1}^n P(X_k \leq x)$$

Comme les X_k suivent la même loi que X , on a alors :

$$F_n(x) = P(M_n \leq x) = F(x)^n = \begin{cases} \left(\frac{2}{\pi} \text{Arctan } x\right)^n & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

7) a) Comme M_n est à valeurs strictement positives, la variable n/M_n est bien définie et, comme elle est à valeurs strictement positives on a : $G_n(x) = 0$ si $x \leq 0$.

On a aussi :

$$\forall x > 0, G_n(x) = P\left(\frac{n}{M_n} \leq x\right) = P\left(M_n \geq \frac{n}{x}\right) \stackrel{M_n \text{ est à densité}}{\downarrow} = 1 - F_n\left(\frac{n}{x}\right) = 1 - \left(\frac{2}{\pi} \text{Arctan}\left(\frac{n}{x}\right)\right)^n$$

7) b) Dans la suite, on prend $x > 0$, dès lors, on a $\frac{n}{x} > 0$, et d'après la question 1b) :

$$\text{Arctan}\left(\frac{n}{x}\right) = \frac{\pi}{2} - \text{Arctan}\left(\frac{x}{n}\right)$$

Par conséquent, $\frac{2}{\pi} \text{Arctan}\left(\frac{n}{x}\right) = 1 - \frac{2}{\pi} \text{Arctan}\left(\frac{x}{n}\right)$, d'où :

$$\forall x > 0, G_n(x) = 1 - \left(1 - \frac{2}{\pi} \text{Arctan}\left(\frac{x}{n}\right)\right)^n$$

On peut alors écrire (notation exponentielle) :

$$\left(1 - \frac{2}{\pi} \text{Arctan}\left(\frac{x}{n}\right)\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{2}{\pi} \text{Arctan}\left(\frac{x}{n}\right)\right)\right)$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{\pi} \text{Arctan}\left(\frac{x}{n}\right) = 0$, on a, d'après la question 2) :

$$n \ln\left(1 - \frac{2}{\pi} \text{Arctan}\left(\frac{x}{n}\right)\right) \underset{+\infty}{\sim} n \times \frac{-2}{\pi} \text{Arctan}\left(\frac{x}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} -\frac{2}{\pi} x$$

Par continuité de la fonction exponentielle, on obtient :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} G_n(x) = \begin{cases} 1 - \exp\left(-\frac{2}{\pi} x\right) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Bilan : la suite $\left(\frac{n}{M_n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de

paramètre $\frac{2}{\pi}$.

Partie 4

8) En notant α l'angle $(\overrightarrow{BO}, \overrightarrow{BM})$, on a $\tan(\alpha) = X_M$. Comme α est une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, on peut écrire, en notant H la fonction de répartition de X_M :

$$\forall x \in \mathbb{R}, H(x) = P(X_M \leq x) = P(\tan(\alpha) \leq x) = P(\alpha \leq \text{Arctan}(x))$$

$\text{Arctan}(x)$ est, bien sûr, élément de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, d'où, par définition de la fonction de répartition de la loi uniforme :

$$\forall x \in \mathbb{R}, H(x) = \frac{\text{Arctan}(x) - (-\pi/2)}{\pi} = \frac{\text{Arctan}(x) + \pi/2}{\pi}$$

En notant K la fonction de répartition de $|X_M|$, on a tout de suite :

$$\forall x \in \mathbb{R}_-^*, K(x) = 0 \quad (1)$$

Ensuite, on a :

$\forall x \in \mathbb{R}_+, K(x) = P(|X_M| \leq x) = P(-x \leq X_M \leq x) = H(x) - H(-x)$, car X_M est à densité.

En remplaçant, on trouve :

$$K(x) = \frac{\text{Arctan}(x) + \pi/2}{\pi} - \frac{\text{Arctan}(-x) + \pi/2}{\pi} = \frac{\text{Arctan}(x) - \text{Arctan}(-x)}{\pi}$$

Comme la fonction Arctan est impaire, il reste :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, K(x) = \frac{2}{\pi} \text{Arctan}(x) \quad (2)$$

Avec (1) et (2), on peut conclure que $|X_M|$ suit la loi de Cauchy.

Exercice 2

Partie 1

1) Soit A la matrice considérée. Il y a trois cas à envisager :

- Si A n'a aucune valeur propre, elle n'est évidemment pas diagonalisable.
- Si A n'a qu'une valeur propre λ et si A était diagonalisable, alors il existerait une matrice P inversible telle que $A = P\lambda I P^{-1} = \lambda P P^{-1} = \lambda I$, mais comme A n'est pas scalaire (c'est-à-dire pas proportionnelle à la matrice I), ceci est inenvisageable.
- Si A possède 2 valeurs propres distinctes, on sait que A est diagonalisable (c'est la condition suffisante classique : deux valeurs propres distinctes pour une matrice d'ordre 2).
 - Si les 2 valeurs propres sont réelles, A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
 - Si les 2 valeurs propres sont complexes conjuguées non réelles, A n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

On peut conclure que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ si, et seulement si, A possède 2 valeurs propres réelles distinctes.

Partie 2

2) a) Les valeurs propres de $A(x)$ sont les scalaires λ pour lesquels $A(x) - \lambda I$ n'est pas inversible, c'est-à-dire pour lesquels le déterminant " $ad - bc$ " de $A(x) - \lambda I$ est nul.

Comme $A(x) - \lambda I = \begin{pmatrix} x - \lambda & -1 \\ 1 & x^2 - \lambda \end{pmatrix}$, les λ cherchés sont ceux vérifiant :

$$(x - \lambda)(x^2 - \lambda) + 1 = 0$$

En développant et ordonnant, on trouve que les valeurs propres de $A(x)$ sont les scalaires λ solutions de :

$$(E) \quad \lambda^2 - x(x+1)\lambda + x^3 + 1 = 0$$

2) b) D'après la question 1), on en déduit que $A(x)$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ si, et seulement si, l'équation (E), qui est une équation du second degré d'inconnue λ , possède 2 solutions réelles distinctes, c'est-à-dire si, et seulement si, son discriminant Δ est strictement positif.

On a $\Delta = x^2(x+1)^2 - 4(x^3+1) = x^4 + 2x^3 + x^2 - 4x^3 - 4 = x^4 - 2x^3 + x^2 - 4$, et en factorisant les trois premiers termes, on obtient $\Delta = x^2(x^2 - 2x + 1)^2 - 4$, ce qui s'écrit aussi : $\Delta = x^2(x-1)^2 - 4$.

Bilan :

$$A(x) \text{ est diagonalisable dans } \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \text{ si, et seulement si : } (x(x-1))^2 - 4 > 0$$

3) Grâce à l'identité remarquable $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$, on a :

$$(x(x-1))^2 - 4 = (x(x-1) + 2)(x(x-1) - 2) = (x^2 - x + 2)(x^2 - x - 2)$$

Le discriminant du trinôme $x^2 - x + 2$ est négatif (il vaut -7) donc ce trinôme est toujours "du signe de a ", c'est-à-dire, ici, strictement positif.

Par conséquent, on a l'équivalence :

$$x^2(x-1)^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 > 0$$

Comme les racines du polynôme $x^2 - x - 2 > 0$ sont -1 et 2 (on les trouve en calculant si on veut le discriminant qui vaut 9), on en déduit (signe du trinôme) que :

$$A(x) \text{ est diagonalisable si, et seulement si : } x \in]-\infty, -1[\cup]2, +\infty[$$

En d'autres termes, $A(x)$ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ si, et seulement si : $x < -1$ ou $x > 2$.

4) D'après le résultat de la question 3), on a : $p = P([X < -1] \cup [X > 2])$.

Par incompatibilité des événements $(X < -1)$ et $(X > 2)$, on trouve :

$$p = P(X < -1) + P(X > 2)$$

Comme X est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, on a $P(X < -1) = 0$ donc il reste $p = P(X > 2)$.

On en déduit :

$$p = 1 - F_X(2) = 1 - (1 - e^{-2\lambda})$$

En arrangeant, on obtient :

$$p = e^{-2\lambda}$$

Partie 3

5) Les valeurs propres de $A(x, y)$ sont les réels x et y donc, d'après la question préliminaire, on peut conclure que $A(x, y)$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ si, et seulement si : $y \neq x$.

6) a) La formule des probabilités totales associée au système complet d'événements $(X = n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ s'écrit :

$$P(Y = X) = \sum_{n=1}^{+\infty} P([X = n] \cap [Y = X]) = \sum_{n=1}^{+\infty} P([X = n] \cap [Y = n])$$

Par indépendance de X et Y , on obtient :

$$P(Y = X) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X = n)P(Y = n)$$

6) b) Comme X et Y suivent la même loi géométrique de paramètre α , on obtient en remplaçant :

$$P(Y = X) = \sum_{n=1}^{+\infty} (1-\alpha)^{n-1} \alpha (1-\alpha)^{n-1} \alpha = \sum_{n=1}^{+\infty} ((1-\alpha)^2)^{n-1} \alpha^2 \stackrel{m=n-1}{=} \alpha^2 \sum_{m=0}^{+\infty} ((1-\alpha)^2)^m$$

On sait que $\alpha \in]0,1[$ donc $1-\alpha \in]0,1[$ et ainsi $(1-\alpha)^2 \in]0,1[$.

On trouve alors :

$$P(Y = X) = \alpha^2 \frac{1}{1-(1-\alpha)^2} = \alpha^2 \frac{1}{2\alpha - \alpha^2} = \frac{\alpha}{2-\alpha}$$

7) D'après la question 5), la probabilité p' que $A(X, Y)$ soit diagonalisable est :

$$p' = P(Y \neq X) = 1 - \frac{\alpha}{2-\alpha} = \frac{2(1-\alpha)}{2-\alpha}$$

Exercice 3

1) Dans la somme $\sum_{k=-n}^n \frac{1}{a+k}$, comme a n'est pas entier et comme k est entier, $a+k$ n'est pas entier donc $a+k$ est différent de 0.

Par conséquent, la somme $\sum_{k=-n}^n \frac{1}{a+k}$ est bien définie.

2) a) Pour tout $a \in E$, on a :

$$f_n(a) = \sum_{k=-n}^n \frac{1}{a+k} \stackrel{n \in \mathbb{N}^*}{=} \sum_{k=0}^n \frac{1}{a+k} + \sum_{k=-n}^{-1} \frac{1}{a+k} = \frac{1}{a} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{a+k} + \sum_{k=-n}^{-1} \frac{1}{a+k}$$

En posant $i = -k$ dans la deuxième somme, on obtient :

$$f_n(a) = \frac{1}{a} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{a+k} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{a-k} = \frac{1}{a} + \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{a+k} + \frac{1}{a-k} \right)$$

Par réduction au même dénominateur dans la dernière somme, on trouve bien :

$$\forall a \in E, \forall n \in \mathbb{N}^*, f_n(a) = \frac{1}{a} + \sum_{k=1}^n \frac{2a}{a^2 - k^2}$$

2) b) Comme $a \neq 0$, on a $\frac{2a}{a^2 - k^2} \underset{+}{\sim} -\frac{2a}{k^2}$ et comme la série de terme général $-\frac{2a}{k^2}$ est convergente

(série proportionnelle à une série de Riemann de paramètre $2 > 1$, la série de terme général $\frac{2a}{a^2 - k^2}$ converge également grâce au critère d'équivalence pour les séries dont les termes généraux sont de signe constant (ici, du signe opposé à celui de a)).

Ceci prouve que la somme $\sum_{k=1}^n \frac{2a}{a^2 - k^2}$ possède une limite finie et, par conséquent, que la suite $(f_n(a))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente.

3) a) On a $f_n(a+1) - f_n(a) = \sum_{k=-n}^n \frac{1}{a+1+k} - \sum_{k=-n}^n \frac{1}{a+k}$ et, en posant $i = k+1$ dans la première somme, on obtient :

$$f_n(a+1) - f_n(a) = \sum_{i=-n+1}^{n+1} \frac{1}{a+i} - \sum_{k=-n}^n \frac{1}{a+k}$$

Par télescopage, il reste :

$$\forall a \in E, \forall n \in \mathbb{N}, f_n(a+1) - f_n(a) = \frac{1}{a+n+1} - \frac{1}{a-n}$$

3) b) Comme la suite la suite $(f_n(a))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente, on peut passer à la limite lorsque n tend vers $+\infty$, ce qui donne : $\forall a \in E, f(a+1) - f(a) = 0$.

Ainsi, pour tout a de E , on a $f(a+1) = f(a)$ donc, par définition, f est de période 1 sur E .

4) a) On a :

$$f_n\left(\frac{a}{2}\right) + f_n\left(\frac{a+1}{2}\right) = \sum_{k=-n}^n \frac{1}{\frac{a}{2} + k} + \sum_{k=-n}^n \frac{1}{\frac{a+1}{2} + k} = \sum_{k=-n}^n \frac{2}{a+2k} + \sum_{k=-n}^n \frac{2}{a+1+2k}$$

En isolant le terme d'indice n de la deuxième somme, on a :

$$f_n\left(\frac{a}{2}\right) + f_n\left(\frac{a+1}{2}\right) = \sum_{k=-n}^n \frac{2}{a+2k} + \sum_{k=-n}^{n-1} \frac{2}{a+1+2k} + \frac{2}{a+1+2n}$$

En regroupant maintenant les deux sommes (termes d'indices pairs de $a-2n$ à $a+2n$ dans la première et termes d'indices impairs de $a-2n+1$ à $a+2n-1$ dans la deuxième), on trouve :

$$f_n\left(\frac{a}{2}\right) + f_n\left(\frac{a+1}{2}\right) = 2 \sum_{i=-2n}^{2n} \frac{1}{a+i} + \frac{2}{a+1+2n}$$

On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, f_n\left(\frac{a}{2}\right) + f_n\left(\frac{a+1}{2}\right) = 2f_{2n}(a) + \frac{2}{a+2n+1}$$

4) b) Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{a+2n+1} = 0$, alors en passant à la limite dans l'égalité précédente, on obtient :

$$\forall a \in E, f\left(\frac{a}{2}\right) + f\left(\frac{a+1}{2}\right) = 2f(a)$$

5) a) • On a $\lambda = a + \frac{\mu}{2}$ et comme $\mu = \min(a, 1-a)$, on a aussi $\mu \leq 1-a$, ce qui fait que

$$a + \frac{\mu}{2} \leq a + \frac{1-a}{2}, \text{ soit } a + \frac{\mu}{2} \leq \frac{1+a}{2} < \frac{1+1}{2} = 1.$$

On a donc $\lambda < 1$.

• $\rightarrow$ De plus, avec $|h| \leq \frac{\mu}{2}$, on a $-\frac{\mu}{2} \leq h \leq \frac{\mu}{2}$ d'où : $a - \frac{\mu}{2} \leq a+h \leq a + \frac{\mu}{2}$.

Comme $\lambda = a + \frac{\mu}{2}$, on a déjà $a + h \leq \lambda$.

→ Par ailleurs, comme $\mu = \min(a, 1-a)$ on a $\mu \leq a$, ce qui implique $a - \frac{\mu}{2} \geq a - \frac{a}{2}$, d'où

$a - \frac{\mu}{2} \geq \frac{a}{2} > 0$ car $a \in]0, 1[$. On en déduit que $a + h > 0$.

Bilan : $a + h \in]0, \lambda]$.

5) b) On considère la fonction $g_n : x \mapsto \frac{2x}{x^2 - n^2}$.

Cette fonction est de classe C^1 sur $]0, \lambda]$ car $\lambda < 1$, donc on peut lui appliquer l'inégalité des accroissements finis entre a et $a + h$, ce qui donne, en notant K_n un majorant de $|g'_n|$ sur $]0, \lambda]$:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \left| \frac{2(a+h)}{(a+h)^2 - n^2} - \frac{2a}{a^2 - n^2} \right| \leq |h| \times K_n$$

$$\text{On a } g'_n(x) = \frac{2(x^2 - n^2) - 4x^2}{(x^2 - n^2)^2} = \frac{-2(x^2 + n^2)}{(x^2 - n^2)^2} \text{ donc : } |g'_n(x)| = \frac{2(n^2 + x^2)}{(n^2 - x^2)^2}.$$

En notant $h_n = |g'_n|$, on a :

$$h'_n(x) = 2 \times \frac{2x(n^2 - x^2) + 4x(n^2 + x^2)}{(n^2 - x^2)^3} = \frac{4x(n^2 - x^2 + 2n^2 + 2x^2)}{(n^2 - x^2)^3} = \frac{4x(3n^2 + x^2)}{(n^2 - x^2)^3}$$

Comme $n \in \mathbb{N}^*$ et $x^2 \in]0, \lambda^2] \subset]0, 1[$, on a $n^2 > x^2$ donc $(n^2 - x^2)^3 > 0$ et ainsi, en notant que $3n^2 + x^2 > 0$, $h'_n(x)$ est du signe de x .

On conclut que $h'_n(x)$ est positive sur $]0, \lambda]$ donc que h_n , c'est-à-dire $|g'_n|$ est croissante sur $]0, \lambda]$.

On en déduit :

$$\forall x \in]0, \lambda], |g'_n(x)| \leq |g'_n(\lambda)|$$

En remplaçant $|g'_n(\lambda)|$ par $\frac{2(n^2 + \lambda^2)}{(n^2 - \lambda^2)^2}$, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \left| \frac{2(a+h)}{(a+h)^2 - n^2} - \frac{2a}{a^2 - n^2} \right| \leq 2|h| \times \frac{n^2 + \lambda^2}{(n^2 - \lambda^2)^2}$$

5) c) En sommant pour n allant de 1 à N , on obtient après utilisation de l'inégalité triangulaire :

$$\left| \sum_{n=1}^N \left(\frac{2(a+h)}{(a+h)^2 - n^2} - \frac{2a}{a^2 - n^2} \right) \right| \leq \sum_{n=1}^N \left| \frac{2(a+h)}{(a+h)^2 - n^2} - \frac{2a}{a^2 - n^2} \right| \leq 2|h| \sum_{n=1}^N \frac{n^2 + \lambda^2}{(n^2 - \lambda^2)^2}$$

On a $\sum_{n=1}^N \left(\frac{2(a+h)}{(a+h)^2 - n^2} - \frac{2a}{a^2 - n^2} \right) = \sum_{n=1}^N \frac{2(a+h)}{(a+h)^2 - n^2} - \sum_{n=1}^N \frac{2a}{a^2 - n^2}$ et comme $f_N(a) = \frac{1}{a} + \sum_{k=1}^N \frac{2a}{a^2 - k^2}$,

on obtient :

$$\sum_{n=1}^N \left(\frac{2(a+h)}{(a+h)^2 - n^2} - \frac{2a}{a^2 - n^2} \right) = f_N(a+h) - \frac{1}{a+h} - f_N(a) + \frac{1}{a} = f_N(a+h) - f_N(a) + \frac{h}{a(a+h)}$$

On trouve donc : $\left| f_N(a+h) - f_N(a) + \frac{h}{a(a+h)} \right| \leq 2|h| \sum_{n=1}^N \frac{n^2 + \lambda^2}{(n^2 - \lambda^2)^2}.$

Comme $|x| - |y| \leq |x+y|$, on a :

$$\left| f_N(a+h) - f_N(a) \right| - \left| \frac{h}{a(a+h)} \right| \leq \left| f_N(a+h) - f_N(a) + \frac{h}{a(a+h)} \right|$$

On en déduit :

$$\left| f_N(a+h) - f_N(a) \right| - \left| \frac{h}{a(a+h)} \right| \leq 2|h| \sum_{n=1}^N \frac{n^2 + \lambda^2}{(n^2 - \lambda^2)^2}$$

Ceci donne :

$$\left| f_N(a+h) - f_N(a) \right| \leq \left| \frac{h}{a(a+h)} \right| + 2|h| \sum_{n=1}^N \frac{n^2 + \lambda^2}{(n^2 - \lambda^2)^2}$$

La série de terme général $\frac{n^2 + \lambda^2}{(n^2 - \lambda^2)^2}$ est convergente (par équivalence avec la série de Riemann de paramètre $2 > 1$) donc la somme $\sum_{n=1}^N \frac{n^2 + \lambda^2}{(n^2 - \lambda^2)^2}$ possède une limite finie lorsque N tend vers $+\infty$ et on peut donc faire tendre N vers $+\infty$, ce qui, avec a et $a+h$ strictement positifs, donne :

$$\left| f(a+h) - f(a) \right| \leq \frac{|h|}{a(a+h)} + 2|h| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2 + \lambda^2}{(n^2 - \lambda^2)^2}$$

5) d) La somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2 + \lambda^2}{(n^2 - \lambda^2)^2}$ ne dépend pas de h donc $2|h| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2 + \lambda^2}{(n^2 - \lambda^2)^2}$ tend vers 0 quand h tend vers 0 et comme $\frac{|h|}{a(a+h)}$ tend aussi vers 0 quand h tend vers 0, on a $\lim_{h \rightarrow 0} f(a+h) = f(a)$.

Ceci est valable pour tout a de $]0,1[$ donc f est continue sur $]0,1[$.

Continuité sur tout intervalle du type $]n, n+1[$: en écrivant, pour tout b de $]n, n+1[$, $f(b+h) = f(b+h-n)$, on a $\lim_{h \rightarrow 0} f(b+h) = \lim_{h \rightarrow 0} f(b-n+h) = f(b-n)$ car $b-n \in]0,1[$ et f est continue sur $]0,1[$. Ensuite, comme f est de période 1, on conclut avec $f(b-n) = f(b)$, ce qui donne $\lim_{h \rightarrow 0} f(b+h) = f(b)$ et prouve la continuité de f en b .

On en déduit que f est continue sur E .

6) a) Les séries envisagées ci-dessous sont toutes convergentes (toujours par équivalence et/ou proportionnalité avec des séries de Riemann).

De plus, on a $\left| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{x^2 - n^2} \right| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \left| \frac{2x}{x^2 - n^2} \right| = 2|x| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - x^2}$, mais on sait que $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ donc $x^2 \leq \frac{1}{4}$ et ainsi :

$$n^2 - x^2 \geq n^2 - \frac{1}{4}$$

On a donc :

$$\left| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{x^2 - n^2} \right| \leq 2|x| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - \frac{1}{4}}$$

6) b) On sait que $f_n(x) = \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^n \frac{2x}{x^2 - k^2}$ donc $f(x) = \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2x}{x^2 - k^2}$ et on peut écrire :

$$f(x) - \frac{1}{x} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2x}{x^2 - k^2}$$

On obtient, d'après la question 6a), $\left| f(x) - \frac{1}{x} \right| \leq 2|x| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - \frac{1}{4}}$, mais comme la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - \frac{1}{4}}$ ne

dépend pas de x , on a $\lim_{x \rightarrow 0} 2|x| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - \frac{1}{4}} = 0$ et on en déduit par encadrement (une valeur absolue est

positive) :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(f(x) - \frac{1}{x} \right) = 0$$

7) a) La fonction $x \mapsto \cotan(\pi x) = \frac{\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)}$ est définie si, et seulement si, $\sin(\pi x) \neq 0$, c'est-à-dire si, et seulement si, $\pi x \notin \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, soit $x \notin \mathbb{Z}$.

L'ensemble de définition de $x \mapsto \cotan(\pi x)$ est donc E .

7) b) On écrit l'équivalent admis en remplaçant x par πx (πx est bien au voisinage de 0 lorsque x est au voisinage de 0).

On obtient $\pi x \cotan(\pi x) - 1 \underset{0}{\sim} -\frac{\pi^2 x^2}{3}$ et en divisant par x , on a : $\pi \cotan(\pi x) - \frac{1}{x} \underset{0}{\sim} -\frac{\pi^2 x}{3}$.

Comme $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\pi^2 x}{3} = 0$, on en déduit :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\pi \cotan(\pi x) - \frac{1}{x} \right) = 0$$

7) c) On a $\cotan(\pi(x+1)) = \cotan(\pi x + \pi) = \frac{\cos(\pi x + \pi)}{\sin(\pi x + \pi)} = \frac{-\cos(\pi x)}{-\sin(\pi x)} = \frac{\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)} = \cotan(\pi x)$ donc

la fonction $x \mapsto \cotan(\pi x)$ est 1-périodique sur E .

Comme $g(x) = f(x) - \pi \cotan(\pi x)$ et comme f est 1-périodique sur E , on peut conclure que g est 1-périodique sur E .

D'autre part, $x \mapsto \cotan(\pi x)$ est continue sur E (quotient, dont le dénominateur ne s'annule pas, de fonctions continues sur E) et f est aussi continue sur E d'après la question 5c), donc g est continue sur E comme différence de deux fonctions continues sur E .

7) d) (i) Pour tout x de E , on peut écrire $g(x) = \left(f(x) - \frac{1}{x} \right) - \left(\pi \cotan(\pi x) - \frac{1}{x} \right)$ et, d'après les questions 6b) et 7b), on a sans problème :

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$$

7) d) (ii) La limite précédente permet de prolonger par continuité la fonction g en 0 en posant $g(0) = 0$ (l'énoncé ayant précisé que le prolongement reste noté g).

Soit $n \in \mathbb{Z}$, pour tout $x \in \left]n - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}\right[$, on a $\lim_{x \rightarrow n} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} g(x + n)$

Comme $x \notin \mathbb{Z}$, on a $g(x + n) = g(x)$ par 1-périodicité de g sur E , d'où $\lim_{x \rightarrow n} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$.

Finalement, on peut prolonger g par continuité à tout entier n en posant $g(n) = 0$.

7) e) On sait déjà, d'après les questions 7c) et 7d)ii), que g est continue sur $\mathbb{R}$.

Pour la 1-périodicité, elle est acquise sur E et en ce qui concerne $\mathbb{Z}$, il suffit de constater que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $g(n + 1) = 0 = g(n)$, ce qui prouve la 1-périodicité de g sur $\mathbb{Z}$.

Ainsi, g est 1-périodique et continue sur $\mathbb{R}$.

8) a) • Si $x \notin \mathbb{Z}$, on a $g(x) = f(x) - \pi \cotan(\pi x)$ donc :

$$g\left(\frac{x}{2}\right) + g\left(\frac{x+1}{2}\right) = f\left(\frac{x}{2}\right) - \pi \cotan\left(\pi \frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right) - \pi \cotan\left(\pi \frac{x+1}{2}\right)$$

Comme $\cotan\left(\pi \frac{x+1}{2}\right) = \cotan\left(\pi \frac{x}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\cos\left(\pi \frac{x}{2} + \frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(\pi \frac{x}{2} + \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{-\sin\left(\pi \frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\pi \frac{x}{2}\right)} = -\tan\left(\pi \frac{x}{2}\right)$, on obtient :

$$g\left(\frac{x}{2}\right) + g\left(\frac{x+1}{2}\right) = f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right) - \pi \cotan\left(\pi \frac{x}{2}\right) + \pi \tan\left(\pi \frac{x}{2}\right)$$

Grâce à la question 4b), on sait que $f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right) = 2f(x)$ donc :

$$g\left(\frac{x}{2}\right) + g\left(\frac{x+1}{2}\right) = 2f(x) + \pi \tan\left(\pi \frac{x}{2}\right) - \pi \cotan\left(\pi \frac{x}{2}\right)$$

Pour finir, $\pi \tan\left(\pi \frac{x}{2}\right) - \pi \cotan\left(\pi \frac{x}{2}\right) = \pi \times \frac{\sin\left(\pi \frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\pi \frac{x}{2}\right)} - \pi \times \frac{\cos\left(\pi \frac{x}{2}\right)}{\sin\left(\pi \frac{x}{2}\right)} = \pi \times \frac{\sin^2\left(\pi \frac{x}{2}\right) - \cos^2\left(\pi \frac{x}{2}\right)}{\sin\left(\pi \frac{x}{2}\right)\cos\left(\pi \frac{x}{2}\right)}$.

Comme $\sin^2\left(\pi \frac{x}{2}\right) - \cos^2\left(\pi \frac{x}{2}\right) = -\cos(\pi x)$ et $\sin\left(\pi \frac{x}{2}\right)\cos\left(\pi \frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}\sin(\pi x)$, on trouve :

$$\pi \tan\left(\pi \frac{x}{2}\right) - \pi \cotan\left(\pi \frac{x}{2}\right) = -2\pi \cotan(\pi x)$$

Finalement, on a $g\left(\frac{x}{2}\right) + g\left(\frac{x+1}{2}\right) = 2f(x) - 2\pi \cotan(\pi x) = 2(f(x) - \pi \cotan(\pi x))$, ce qui signifie :

$$\forall x \in E, g\left(\frac{x}{2}\right) + g\left(\frac{x+1}{2}\right) = 2g(x)$$

• Si $x \in \mathbb{Z}$, alors, pour tout $y \in \left]x - \frac{1}{2}, x + \frac{1}{2}\right[$, on a $g\left(\frac{y}{2}\right) + g\left(\frac{y+1}{2}\right) = 2g(y)$ d'après ce qui

précède, puis, par passage à la limite, on a $\lim_{y \rightarrow x} g\left(\frac{y}{2}\right) + \lim_{y \rightarrow x} g\left(\frac{y+1}{2}\right) = \lim_{y \rightarrow x} 2g(y)$, et par continuité de

g sur $\mathbb{R}$, on obtient $g\left(\frac{x}{2}\right) + g\left(\frac{x+1}{2}\right) = 2g(x)$.

Grâce aux deux points précédents, on a : $\forall x \in \mathbb{R}, g\left(\frac{x}{2}\right) + g\left(\frac{x+1}{2}\right) = 2g(x)$.

8) b) la fonction g est continue sur $\mathbb{R}$ donc continue sur $[0,1]$, et par composition avec la fonction valeur absolue qui est continue sur $\mathbb{R}$, il en est de même de $|g|$.

Comme $[0,1]$ est fermé et borné, la fonction $|g|$ admet un maximum M sur $[0,1]$.

Par 1-périodicité de g (donc de $|g|$) sur $\mathbb{R}$, on en déduit que $|g|$ admet un maximum M sur $\mathbb{R}$.

8) c) D'après la question 8a), on a : $\forall x \in \mathbb{R}, g\left(\frac{x}{2}\right) + g\left(\frac{x+1}{2}\right) = 2g(x)$. On applique cette égalité

pour $x = \alpha$, ce qui donne : $g\left(\frac{\alpha}{2}\right) + g\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) = 2g(\alpha)$.

On prend la valeur absolue et, avec l'inégalité triangulaire, on trouve :

$$2|g(\alpha)| \leq \left|g\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right| + \left|g\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)\right|$$

Par définition du maximum $M = |g(\alpha)|$, on a $\left|g\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right| \leq M$ et $\left|g\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)\right| \leq M$, et si on avait

$\left|g\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right| < M$, on obtiendrait $2|g(\alpha)| < 2M$, ce qui est faux car $M = |g(\alpha)|$.

On conclut que $\left|g\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right| = M$.

8) d) On procède par récurrence.

- Pour $p = 0$, on a bien $\left|g\left(\frac{\alpha}{2^0}\right)\right| = |g(\alpha)| = M$.

- Soit p un entier naturel tel que $\left|g\left(\frac{\alpha}{2^p}\right)\right| = M$. On raisonne comme à la question 8c) mais en

posant $x = \frac{\alpha}{2^p}$, avec l'hypothèse $M = \left|g\left(\frac{\alpha}{2^p}\right)\right|$ et on trouve $\left|g\left(\frac{\alpha}{2^{p+1}}\right)\right| = M$.

On conclut par récurrence que :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \left|g\left(\frac{\alpha}{2^p}\right)\right| = M$$

8) e) Les fonctions g et valeur absolue sont continues sur $\mathbb{R}$ et comme $\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{\alpha}{2^p} = 0$, alors, en

passant à la limite dans l'égalité $\left|g\left(\frac{\alpha}{2^p}\right)\right| = M$, on trouve $|g(0)| = M$.

Comme $g(0) = 0$, on obtient $M = 0$.

Par définition d'un maximum, on a donc : $\forall x \in \mathbb{R}, |g(x)| \leq 0$. Comme une valeur absolue est positive, on en déduit, pour tout réel x , $|g(x)| = 0$, ce qui équivaut à $g(x) = 0$.

Conclusion : g est la fonction nulle.

8) f) Pour tout réel x , on sait que $g(x) = f(x) - \pi \cotan(\pi x)$ donc $f(x) = \pi \cotan(\pi x)$.

De plus, pour tout $a \in E$, on a $f(a) = \frac{1}{a} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2a}{a^2 - k^2}$ donc :

$$\forall a \in E, \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2a}{a^2 - n^2} = \pi \cotan(\pi a) - \frac{1}{a}$$

CONCOURS PRÉMASTER

RAPPORT DE CORRECTION 2026 :

Épreuve de MATHÉMATIQUES

Présentation de l'épreuve.

L'épreuve, longue comme d'habitude, comportait trois exercices, ce qui permettait de juger les candidats sur la presque totalité du programme de l'épreuve : algèbre linéaire, analyse et probabilités. Les correcteurs ont trouvé le sujet adapté, sélectif et exigeant tout en respectant scrupuleusement le programme.

- L'exercice 1 portait sur le programme de probabilités.

La première partie demandait d'établir un préliminaire d'analyse concernant la fonction arctangente.

La deuxième partie présentait la loi de Cauchy.

La troisième partie demandait de prouver la convergence en loi de la suite des variables

$$Y_n = \frac{n}{\max(X_1, \dots, X_n)}, \text{ où } X_1, \dots, X_n \text{ sont des variables aléatoires indépendantes suivant la loi de}$$

Cauchy.

La quatrième partie demandait d'examiner une situation géométrique simple dans laquelle une longueur aléatoire suivait la loi de Cauchy.

- L'exercice 2 portait sur les programmes d'algèbre linéaire et de probabilités.

La première partie demandait d'établir un préliminaire d'algèbre linéaire concernant la diagonalisation matricielle.

La deuxième partie proposait la diagonalisation de la matrice aléatoire $A(X) = \begin{pmatrix} X & -1 \\ 1 & X^2 \end{pmatrix}$, où X est une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

La troisième partie proposait la diagonalisation de la matrice aléatoire $A(X, Y) = \begin{pmatrix} X & 1 \\ 0 & Y \end{pmatrix}$, où X et Y sont des variables aléatoires indépendantes suivant la loi géométrique de paramètre $\alpha \in]0, 1[$.

- L'exercice 3, portant sur le programme d'analyse, avait pour objectif d'établir le développement eulérien suivant, valable pour tout réel a non entier :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2a}{a^2 - n^2} = \pi \cotan(\pi a) - \frac{1}{a}$$

On commençait par l'étude de la suite des fonctions f_n définie sur l'ensemble E des réels non entiers

par $f_n(a) = \sum_{k=-n}^n \frac{1}{a+k}$ et on prouvait sa convergence (simple) vers une certaine fonction f .

La suite consistait à montrer que f est 1-périodique et continue sur E avant de conclure que, pour tout a de E , on a $f(a) = \pi \cotan(\pi a)$.

Statistiques.

Cette épreuve a réuni 303 candidats (contre 270 l'année dernière).

- La moyenne obtenue à cette épreuve est de 11,4 sur 20, très légèrement supérieure à celle de l'année dernière (plus 0,06 point).
- L'écart type est d'environ 5,42 (0,74 point de plus que l'année dernière).
- La médiane est, quant à elle, égale à 11,2 (elle était de 11 l'année dernière).
- 10,6 % des candidats obtiennent une note inférieure ou égale à 4 (c'était 6,3% en 2025).
- 24,8 % des candidats ont entre 8 et 12 (c'était 29,6 % en 2025).
- 14,9 % des candidats obtiennent une note supérieure ou égale à 18 (c'était 10,7% en 2025).

Analyse des copies.

- Les correcteurs constatent que les copies sont, dans l'ensemble, agréables à lire, sauf quelques unes qui ressemblent à des brouillons.
- D'un point de vue académique, ils notent que le niveau est encore plus hétérogène que l'année dernière, avec, plus d'excellents candidats, mais plus de candidats dont les copies sont inconsistantes, voire presque vides. Sur le plan de la rigueur, les arguments mathématiques nécessaires aux conclusions sont parfois absents comme si les réponses à certaines questions étaient évidentes !
- Les correcteurs trouvent l'ensemble d'un niveau honorable mais les probabilités restent un vrai problème pour les candidats.
- Les correcteurs invitent les candidats à lire le programme de cette épreuve et à le respecter à la lettre : les dépassements ont été vivement sanctionnés.

Commentaires sur les questions les plus fréquemment mal traitées.

Exercice 1

- 1) b) Une fonction de dérivée nulle n'est constante que si elle est définie sur un intervalle, ce qu'il fallait signaler ici.
- 2) Les développements limités peuvent être intégrés mais pas « primitivés ». Rappelons qu'on ne peut pas composer les équivalents.
- 5) On n'écrit pas $F(X) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$, ni $F = \int_{-\infty}^x f(t) dt$, mais $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$. Il faut également éviter d'écrire $F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx$, ce qui n'a aucun sens.

Il fallait en plus tenir compte du fait que f était nulle sur $\mathbb{R}_-$, ce qui menait à $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ pour $x \geq 0$.

- 6) Mêmes remarques avec également la confusion sur la définition de la fonction de répartition consistant à écrire $F_n(x) = P(M_n \geq x)$ au lieu de $F_n(x) = P(M_n \leq x)$.
- 7) b) Ici aussi, il ne fallait pas composer les équivalents.

Exercice 2

- 1) De nombreuses confusions entre polynôme caractéristique et polynôme minimal afin de décider de la diagonalisabilité d'une matrice, ce qui fait que de simples implications sont devenues des équivalences.
- 2) a) Lu avec un certain effroi : $\det(A(x) - \lambda)$! L'énoncé demandait une équation vérifiée par les valeurs propres donc il ne fallait pas proposer de réponse du genre « $\lambda^2 - x(x+1)\lambda + x^3 + 1$ » !

- 3) La faute invraisemblable à ce niveau : $(x(x-1))^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow x(x-1) > 2$! Il se trouve que l'on trouvait tout de même le bon résultat mais ceci n'avait aucune valeur.
- 4) La loi exponentielle (à densité) a souvent été confondue avec la loi de Poisson (discrète).
- 6a) Le résultat était donné, ce qui a conduit à de nombreuses tricheries ! La formule des probabilités totales n'est dominée que par un très faible nombre de candidats.
- 6b) La convergence des séries géométriques semble aller de soi pour beaucoup de candidats !

Exercice 3

- 1) Il n'y avait pas de problématique « série » dans cette question : il fallait juste vérifier que, pour tout entier k de $\llbracket -n, n \rrbracket$, on avait $a + k \neq 0$.

- 2) b) La convergence de la somme $\sum_{k=1}^n \frac{2a}{a^2 - k^2}$ quand n tend vers $+\infty$ a donné lieu à de nombreuses fautes : oubli du signe des séries mises en jeu, équivalent faux comme $\frac{2a}{a^2 - k^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{k^2}$, etc.

- 3) b) Il faut toujours justifier qu'on a le droit de passer à la limite dans une expression.
- 5) a) Beaucoup de confusions « pratiques » entre inégalité stricte et large.
- 5) b) L'inégalité des accroissements finis semble ignorée d'un grand nombre de candidats et pour les autres, la majoration $\left| \frac{2(n^2 + x^2)}{(n^2 - x^2)^2} \right| \leq \left| \frac{2(n^2 + \lambda^2)}{(n^2 - \lambda^2)^2} \right|$ pour $x \in]0, \lambda]$ semblait n'être qu'une formalité ne

nécessitant aucune preuve !

- 5) c) La sommation de quantités contenant des valeurs absolues pose problème à une majorité de candidats.
- 5) d) Un certain nombre de candidats confondent la continuité en a ($\lim_{h \rightarrow 0} (f(a+h) - f(a)) = 0$)

et la dérivabilité ($\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \in \mathbb{R}$).

- 6) b) La preuve de l'inégalité $\left| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{x^2 - n^2} \right| \leq 2|x| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - \frac{1}{4}}$ pour $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ a donné lieu à de

nombreux petits arrangements très répréhensibles.

- 7) a) L'ensemble de définition de la fonction cotangente a posé des problèmes, ce qui, a priori, n'était pas prévu.
- 7) c) Écrire que $\lim_{h \rightarrow 0} f(x) = \frac{1}{x}$ est une véritable hérésie mathématique !
- La longueur du problème n'a pas permis aux candidats de traiter la fin, mis à part un petit nombre particulièrement à l'aise.

Conclusion.

L'épreuve a permis de repérer et de mettre en valeur les candidats les mieux préparés et les plus aptes à trouver leur place dans des études exigeantes qui nécessitent rigueur et honnêteté intellectuelle. Nous conseillons, comme par le passé, aux futurs candidats de se préparer d'une façon complète, en essayant de ne négliger aucun point du programme qui sera changé à partir du concours 2027 avec, entre autres, l'apparition de l'algèbre bilinéaire.