

CONCOURS PRÉMASTER EDHEC

Programme de mathématiques (en vigueur à partir du concours 2027)

I) Notions fondamentales

Notions élémentaires de théorie des ensembles.
 Logique élémentaire, raisonnement par récurrence.
 Ensembles finis, dénombrement.
 Somme des n premiers entiers naturels non nuls, de leurs carrés, de leurs cubes.
 Calculs et relations d'ordre dans l'ensemble des réels.
 Nombres complexes : module, argument, forme exponentielle, forme trigonométrique, relations de Moivre et Euler.

II) Algèbre générale

Polynômes d'une variable à coefficients réels : degré, division euclidienne, racines, multiplicité d'une racine, factorisation.
 Résolution des équations polynomiales : second degré, degré supérieur à 2 dans le cas où une racine ou plus est évidente, techniques simples de changement d'inconnue (équation bicarrée par exemple).
 Fractions rationnelles : si une fraction rationnelle doit être décomposée en éléments simples, la forme de la décomposition sera fournie par l'énoncé.

La division suivant les puissances croissantes n'est pas au programme.

III) Algèbre linéaire

1) *Espaces vectoriels*
 Résolution des systèmes d'équations linéaires par la méthode du pivot de Gauss.
 Espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$: définition, exemples usuels : $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}_n[X]$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $\mathcal{A}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$, $C^0(I, \mathbb{R})$.
 Combinaison linéaire, famille libre, famille liée, famille génératrice, base, propriétés concernant ces notions en dimension finie.
 Rang d'une famille de vecteurs.
 Matrice d'une famille de vecteurs dans une base. Rang d'une matrice, détermination pratique.
 Théorème de la base incomplète et applications.
 Sous-espaces vectoriels ; intersection et somme d'un nombre fini de sous-espaces vectoriels.
 Sous-espaces supplémentaires : définition, caractérisations en dimension finie.
 Somme directe d'un nombre fini de sous-espaces vectoriels, caractérisation en dimension finie par les bases.

2) *Applications linéaires*

Applications linéaires : définition, caractérisations. Espace vectoriel $\mathcal{L}(E, F)$.
 Image et image réciproque d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire.
 Endomorphisme, isomorphisme et automorphisme.
 Matrice d'une application linéaire dans des bases en dimension finie. Rang d'une application linéaire.
 Noyau, image : caractérisation de l'injectivité, de la surjectivité.
 Isomorphisme d'un supplémentaire du noyau sur l'image.
 En dimension finie : théorème du rang, application à la caractérisation des isomorphismes quand l'espace de départ et l'espace d'arrivée ont la même dimension.
 Composition des applications linéaires et des endomorphismes, produit de matrices : condition d'existence, propriétés élémentaires.

3) *Diagonalisation des endomorphismes*

Changement de base : effet sur les coordonnées d'un vecteur, effet sur la matrice d'un endomorphisme.

Matrice de passage, matrices semblables.

Invariance de la trace d'une matrice par similitude.

Valeurs propres, vecteurs propres, sous-espaces propres (ces derniers sont en somme directe).

En dimension finie, endomorphismes et matrices diagonalisables : définition, caractérisation.

Conditions suffisantes de diagonalisabilité.

Pratique de la diagonalisation d'une matrice, d'un endomorphisme.

Polynômes d'endomorphismes ou de matrices : si P est un polynôme annulateur de l'endomorphisme f ou de la matrice A , alors les valeurs propres de f (ou de A) sont parmi les racines de P .

Déterminant, polynôme caractéristique, théorème de Cayley-Hamilton.

La trigonalisation des endomorphismes et le polynôme minimal ne sont pas au programme.

IV) Algèbre bilinéaire

1) *Généralités*

Produit scalaire, norme associée, inégalité de Cauchy-Schwarz.

Espaces euclidiens : existence de bases orthonormales, complétion d'une famille orthonormale en une base orthonormale.

Changement de bases orthonormales : la matrice de passage est orthogonale.

Supplémentaire orthogonal d'un sous-espace.

Orthogonalité, familles orthogonales, familles orthonormales, théorème de Pythagore.

2) *Projecteurs orthogonaux*

Définition du projeté orthogonal sur un sous-espace F .

Coordonnées du projeté orthogonal sur un sous-espace F dans une base orthonormale de F .

Caractérisation du projeté orthogonal par minimisation de la norme.

3) *Endomorphismes symétriques espace euclidien*

Définition, caractérisation matricielle.

Les sous-espaces propres d'un endomorphisme symétrique sont 2 à 2 orthogonaux.

Tout endomorphisme symétrique est diagonalisable dans une base orthonormale de vecteurs propres.

Toute matrice symétrique réelle est diagonalisable et la matrice de passage est orthogonale.

V) Analyse

1) *Théorie locale des fonctions d'une variable réelle*

Limites, continuité, dérivabilité, propriétés.

Somme, produit, quotient, composition de fonctions continues ou dérivables en un point.

Passage à la limite dans les inégalités, théorème d'encadrement.

Existence d'une limite à droite et à gauche en tout point pour les fonctions monotones.

Détermination de limites, procédés simples pour lever une indétermination.

Comparaison de fonctions en un point : équivalence et négligeabilité, propriétés usuelles.

La règle de L'Hôpital n'est pas au programme.

2) *Fonctions usuelles*

Logarithme népérien, exponentielle, puissances, valeur absolue, partie entière : propriétés, courbe représentative, limites usuelles faisant intervenir ces fonctions, comparaison.

Fonctions trigonométriques : propriétés, dérivées, valeurs remarquables, limites usuelles faisant intervenir ces fonctions, valeurs particulières.

Parité, périodicité des fonctions trigonométriques, propriétés provenant des symétries de leur graphe ou de la formule $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$. Formules d'addition et de duplication.

3) *Théorie globale des fonctions d'une variable réelle*

Fonctions continues sur un intervalle : théorème des valeurs intermédiaires. L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle. Toute fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.

L'image d'un segment par une fonction continue est un segment.

Fonctions dérivables sur un intervalle : théorèmes de Rolle et des accroissements finis ; inégalité des accroissements finis.

La notion de continuité uniforme n'est pas au programme.

4) *Étude des fonctions d'une variable réelle*

Tracé de la courbe représentative d'une fonction : domaine de définition, parité, imparité, périodicité, limites, variations, pente de la tangente ou de la demi-tangente en un point particulier, étude des branches infinies (asymptote, branche parabolique).

Équation de la tangente en un point. Point d'inflexion, convexité, concavité.

Classe C^k et classe C^∞ d'une fonction sur un intervalle.

Formule de Leibniz.

Formule de Taylor avec reste intégral.

Formule de Taylor-Young et développements limités. Développements limités usuels.

5) *Fonctions réciproques*

Théorème de la bijection, réciproque d'une application f continue strictement monotone d'un intervalle sur un autre, position de la courbe représentative de f^{-1} .

La réciproque d'une application de classe C^1 dont la dérivée ne s'annule pas est de classe C^1 .

Expression de la dérivée de f^{-1} .

Fonctions réciproques des fonctions trigonométriques : ensemble de définition, valeurs remarquables, dérivée et variations.

6) *Suites numériques*

Définition, unicité de la limite d'une suite convergente. Limite d'une combinaison linéaire, d'une somme, d'un produit, d'un quotient de suites.

Si (u_n) est une suite de limite a et si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = \ell$.

Passage à la limite dans les inégalités, théorème de l'encadrement, théorème de convergence monotone.

Détermination de limites, procédés simples pour lever une indétermination.

Comparaison de suites en un point : équivalence et négligeabilité, propriétés usuelles.

7) *Suites usuelles*

Suites arithmétiques, suites géométriques, suites arithmético-géométriques, suites récurrentes linéaires d'ordre 2.

Somme des n premiers termes d'une suite arithmétique.

Somme des n premiers termes d'une suite géométrique.

Suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$: existence des termes de la suite, monotonie, convergence ou divergence de la suite. En cas de convergence de la suite : équation vérifiée par la limite.

Emploi de l'inégalité des accroissements finis pour obtenir une majoration a priori de la différence entre u_n et la limite de la suite. Calcul approché d'un nombre réel à l'aide d'une suite récurrente.

Les suites de fonctions ne sont pas au programme.

8) *Séries numériques*

Série convergente, divergente. Série absolument convergente.

Séries alternées.

Somme d'une série convergente. Sommes partielles, reste d'une série convergente.

Séries de référence : séries géométriques, séries de Riemann, série exponentielle.

Critères d'équivalence, de comparaison et de négligeabilité (les règles de d'Alembert et de Duhamel ne sont pas au programme).

Calcul de sommes de séries : séries de termes généraux q^n , nq^{n-1} , $n(n-1)q^{n-2}$, $a^n/n!$.

Télescopage (séries de terme général $u_n = v_n - v_{n+1}$).

Les séries de Bertrand, les séries entières et les séries de fonctions ne sont pas au programme.

9) *Primitives et intégrales*

On admettra que toute fonction continue sur un intervalle admet une primitive sur cet intervalle.

L'intégrale d'une fonction continue est supposée définie à partir d'une primitive de cette fonction.

Dans le cas d'une fonction présentant des points de discontinuité, on recourt à la relation de Chasles pour se ramener au cas de fonctions continues sur un intervalle.

Calcul de primitives de fonctions simples de la forme $u'u^\alpha$ ($\alpha \neq -1$), u'/u , $u'e^u$.

Primitives des fonctions trigonométriques.

Relation de Chasles, linéarité de l'intégrale.

Changement de variable et intégration par parties.

Si un changement de variable autre qu'affine s'avère nécessaire, il sera fourni par l'énoncé.

Propriétés élémentaires de l'intégrale : positivité, croissance. Intégrale d'une fonction continue positive et strictement positive en au moins un point.

Majoration (resp. minoration) de l'intégrale d'une fonction majorée (resp. minorée).

Sommes de Riemann.

10) *Intégrales généralisées ou impropres*

Intégrales convergentes, divergentes. Intégrales absolument convergentes.

Nature des intégrales $\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} dt$, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$, $\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha} dt$.

En lien avec la loi normale : $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(t-m)^2/2\sigma^2} dt = \sigma\sqrt{2\pi}$ ($\sigma > 0$).

Critères de convergence : comparaison, équivalence et négligeabilité (critère de Riemann).

Calcul d'intégrales généralisées par passage à la limite dans une intégrale définie.

Les changements de variables et les intégrations par parties dans les intégrales généralisées peuvent être effectués au gré du candidat soit sur un segment avant passage à la limite, soit directement sur l'intervalle d'intégration, à condition dans ce dernier cas de justifier la validité du calcul.

Les intégrales de Bertrand ne sont pas au programme.

11) *Fonctions de plusieurs variables réelles*

Notions élémentaires de topologie : ensembles ouverts, fermés, bornés, convexes.

Continuité, dérivées partielles premières et secondes (gradient, hessienne). Théorème de Schwarz.

Dans les exercices, on se limitera à des fonctions admettant des dérivées partielles secondes continues sur leur ensemble de définition.

Condition du premier ordre (nécessaire) pour l'existence d'un extremum local, points critiques.

Condition sur les valeurs propres de la hessienne en un point critique pour l'existence d'un extremum local.

Les formes quadratiques ne sont pas au programme

VI) Probabilités

1) *Notions élémentaires*

Langage des probabilités. Événements, probabilités, propriétés élémentaires.
 Notion de système complet d'événements (fini ou infini).
 Formule de Poincaré, inégalité de Boole.
 Probabilités conditionnelles. Formule des probabilités totales, formule de Bayes.
 Événements indépendants deux à deux, événements mutuellement indépendants.

2) *Variables aléatoires prenant à valeurs dans $\mathbb{N}$.*

Définition, propriétés.
 Calcul et propriétés de l'espérance et de la variance, formule de Koenig-Huygens.
 Loi conditionnée par un événement. La notion d'espérance conditionnelle n'est pas au programme
 Lois usuelles : constante, uniforme, de Bernoulli, binomiale, hypergéométrique, géométrique, de Poisson. Valeur de leur espérance et de leur variance.
 Fonction de variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$: définition, loi, théorème de transfert.

3) *Couples de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$.*

Loi conjointe, lois marginales, lois conditionnelles, liens entre ces lois.
 Covariance et coefficient de corrélation linéaire : existence, calcul, propriétés.
 Cas où le coefficient de corrélation linéaire de deux variables aléatoires est égal à +1 ou -1.

4) *Suites de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$.*

Lemme des coalitions.
 Formule pour la variance d'une somme de n variables aléatoires faisant intervenir les covariances.
 Variables aléatoires deux à deux indépendantes, mutuellement indépendantes.
 Variance d'une somme et espérance d'un produit de variables aléatoires indépendantes.
 Somme de n variables aléatoires indépendantes suivant une loi binomiale de même 2^e paramètre p .
 Somme de n variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Poisson.

5) *Variables aléatoire à densité*

Définition d'une densité. Propriétés de la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.
 Espérance, variance, calcul pratique (formule de Koenig-Huygens).
 Loi uniforme, loi exponentielle, loi normale, loi gamma à un paramètre : densités, espérances et variances.
 Fonction de variable aléatoire à densité : min, max, valeur absolue, puissance, inverse, logarithme, exponentielle ou partie entière d'une variable à densité.
 Lemme des coalitions.
 Densité d'une somme de variables aléatoires à densité indépendantes : convolution.
 Théorème de transfert pour le calcul d'une espérance.

6) *Convergences*

Convergence en probabilité : définition, inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev, loi faible des grands nombres.
 Convergence en loi : définition, théorème de la limite centrée.
 Caractérisation de la convergence en loi d'une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ vers une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.

7) *Estimation*

Estimation ponctuelle : biais, estimateur sans biais, risque quadratique, estimateur convergent.
 Estimation par intervalle de confiance.